UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Scuola di Dottorato in Scienze Matematiche

IMMACOLATA CARUSO

Strutture Lineari-Ordinate nel Reticolo delle Partizioni di un Insieme e Applicazioni ai Gruppi di Butler

Tesi di Dottorato di Ricerca

XVII ciclo

Tutori:
Prof. C. De Vivo
Prof. C. Metelli

Coordinatore:
Prof. S. Rionero

Indice

Introduzione

Nello studio e nell'elaborazione di teorie riguardanti strutture matematiche si presentano spesso situazioni in cui una "base ridondante", cioè un sistema di generatori con una o più relazioni di dipendenza, è più naturale di quanto sarebbe una "base indipendente". Nelle ricerche sui $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppi di Butler (gruppi abeliani senza torsione di rango finito definibili mediante una base ridondante con una sola relazione di dipendenza), gli studiosi che se ne sono occupati (in particolare De Vivo e Metelli) hanno messo in luce uno strumento lineare-combinatorio (una $\{0,1\}$-tabella detta "tenda") con funzionamento e trasformazioni affatto originali, che può essere usato in molti ambiti (reticoli geometrici, gruppi abeliani, spazi vettoriali e loro rappresentazioni) in cui sia rilevante l'esistenza di una base ridondante.

L'argomento di questa tesi è lo studio e l'applicazione di tale strumento matematico, che consente soluzioni algoritmiche a problemi algebrici sia in strutture finite che infinite.

In particolare lo strumento "tenda" consente di affrontare alcune interessanti problematiche riguardanti il reticolo geometrico delle partizioni di un insieme finito di ordine m, che dualmente sup-immerso mediante una sua base ridondante nello spazio proiettivo di dimensione $m-2$ sul campo $\mathbb{Z}_2$, può essere studiato simultaneamente come struttura d'ordine e come struttura lineare.

Tali tematiche vengono affrontate nei primi due capitoli di questa tesi. In particolare, nel primo capitolo e nella prima parte del secondo si rielaborano alcuni risultati sul reticolo delle partizioni e sulle tende. Si passa poi ad analizzare le proprietà della tenda associata ad un automorfismo di uno spazio vettoriale su $\mathbb{Z}_2$ di dimensione finita. Tale analisi conduce ad un significativo miglioramento di un recente risultato di Barioli, De Vivo e Metelli [5] sulle rappresentazioni di uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Nel corso delle ricerche sono sorti in maniera naturale alcuni interessanti problemi sui rapporti fra la struttura d'ordine e la struttura lineare del reticolo delle partizioni di un insieme finito. Nel terzo capitolo vengono affrontati due di questi problemi riuscendo a pervenire ad una formulazione più maneggevole, che consente molto probabilmente di affrontarli usando le tende e i risultati ottenuti su di esse.

Gli ultimi due capitoli di questa tesi sono dedicati ai $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppi.

Nel quarto capitolo, dopo aver riportato un importante risultato di Fuchs e Metelli del 1991 che può essere visto come il punto di partenza nell'approccio allo studio dei $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppi attraverso le tende, viene mostrato in che modo è possibile rappresentare un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo con una tenda. Vengono, poi, riportati i risultati di De Vivo e Metelli inerenti i cambi-base e gli addendi diretti indecomponibili dei $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppi. Inoltre, sempre nel quarto capitolo, è inserita una caratterizzazione dei gruppi abeliani completamente decomponibili ottenuta sfruttando la semplificazione data del risultato di Barioli, De Vivo e Metelli.

Infine, nel quinto capitolo, vengono riportati i risultati ottenuti in collaborazione con De Vivo e Metelli inerenti le decomposizioni dirette dei $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppi.

1 Lo spazio vettoriale delle bipartizioni

E' necessario fare alcune premesse.
Sia $I = \{1, \ldots, m\}$.

$\wp(m)$ *denoterà l'insieme delle parti di* I. Per un sottoinsieme C di I, in alcuni casi, verrà usata la notazione C^{-1} in luogo di $I \backslash C$.

E' noto che $\wp(m)(\subseteq)$ è un'algebra di Boole e che $\wp(m)(+, \cdot)$, ove $+$ è la somma Booleana d'insiemi, è uno $\mathbb{Z}_2$-spazio vettoriale di dimensione m. Denotata con δ_A la funzione caratteristica dell'insieme A, tornerà utile l'identificazione di $\wp(m)$ con ${\mathbb{Z}_2}^m$ attraverso l'isomorfismo lineare

$$\delta : A \in \wp(m) \to \delta_A = (\delta_A(1), \ldots, \delta_A(m)) \in \mathbb{Z}_2^m.$$

Un sottoinsieme di I si dirà *regolare* se ha cardinalità diversa da $m - 1$. L'insieme dei sottoinsiemi regolari di I verrà denotato con $\wp_R(m)$.

$\mathbb{P}(m)$ *denoterà l'insieme delle partizioni di* I. Gli elementi di una partizione di I saranno chiamati blocchi, i loro complementi rispetto ad I co-blocchi. Una partizione con $2, 3, 4$ blocchi sarà detta rispettivamente bi-, tri-, quadri-partizione.

E' semplice osservare che ordinando $\mathbb{P}(m)$ rispetto alla relazione d'ordine "maggiore" = "meno fine" si ottiene un reticolo (non distributivo, se $m \geq 3$). E' necessario distinguere alcune partizioni. Per ogni $E \subseteq I$ e $i \in I$, si pone:

- $p_E = \{I \backslash E, \{i\} \mid i \in E\}$, la *partizione puntata* puntata su E;
- $b_E = b_{I \backslash E} = \{I \backslash E, E\}$, la *bipartizione* su E (o $I \backslash E$);
- $p_i = p_{\{i\}} = b_{\{i\}} = b_{I \backslash \{i\}} = \{\{i\}, I \backslash \{i\}\}$, la *bipartizione puntata* puntata su i.

Le seguenti proprietà sono immediate:

Lemma 1.0.1 *Per ogni* $E \subseteq I$ *e per ogni partizione* $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ *di* I, *si ha*:

- $p_E = \bigwedge_{i \in E} p_i$;
- $b_E = p_E \vee p_{I \backslash E}$;
- $\mathcal{C} = b_{C_1} \wedge \cdots \wedge b_{C_k} = \bigwedge_{i \neq j} b_{C_i}$ *per ogni* $j \in I$;

- $\mathcal{C} = p_{I\setminus C_1} \wedge \cdots \wedge p_{I\setminus C_k}$.

In tale contesto, si dirà che una famiglia $B = \{b_i \mid i \in I\}$ di elementi di uno spazio vettoriale V di dimensione $m-1$ su un campo K è una *base ridondante* se ogni sua parte propria è linearmente indipendente (equiv. per $K = \mathbb{Z}_2$, se nessuna sottosomma dei b_i è 0). Chiaramente, la somma degli elementi di una base ridondante è nulla.

$\mathbb{B}(m)$ *denoterà l'insieme delle bipartizioni di* I. Posto $b_E + b_F = b_{E+F}$ per ogni $b_E, b_F \in \mathbb{B}(m)$, $\mathbb{B}(m)(+,\cdot)$ è uno $\mathbb{Z}_2$-spazio vettoriale di dimensione $m-1$. L'insieme delle bipartizioni puntate di I è una base ridondante di $\mathbb{B}(m)$. L'applicazione

$$\delta : \delta_E \in \mathbb{Z}_2^m \to b_E \in \mathbb{B}(m)$$

è un epimorfismo lineare ed ha come nucleo $\Delta = \{\delta_\varnothing, \delta_I\}$. Pertanto, è possibile identificare ogni bipartizione b_E con il laterale $\delta_E + \Delta = \{\delta_E, \delta_{I\setminus E}\}$ ossia, con il vettore δ_E identificato a meno dello scambio degli 0 con gli 1.

Una m-upla di bipartizioni $(b_{E_1}, \ldots, b_{E_m})$ si dice *ammissibile* se è una base ridondante di $\mathbb{B}(m)$.

Ad ogni partizione $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ di I è associato il sottospazio vettoriale $V(\mathcal{C})$ di $\mathbb{B}(m)$; precisamente

$$V(\mathcal{C}) = \{b_E \in \mathbb{B}(m) \mid b_E \geq \mathcal{C}\}.$$

Lemma 1.0.2 *Se* $\{b_{E_i} \mid i \in J\}$ *è una famiglia di elementi di* $\mathbb{B}(m)$ *allora* $\sum\limits_{i\in J} b_{E_i} \geq \bigwedge\limits_{i\in J} b_{E_i}$

Lemma 1.0.3 *Per ogni* $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ *e* $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_s\} \in \mathbb{P}(m)$ *si ha*:

- $V(\mathcal{C}) = \langle b_{C_1}, \ldots, b_{C_k} \rangle$;
- $V(\mathcal{C})$ *ha dimensione* $k-1$;
- $V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{D}) = V(\mathcal{C} \vee \mathcal{D})$;
- *se* $\mathcal{C} \leq \mathcal{D}$ *allora* $V(\mathcal{D}) \leq V(\mathcal{C})$;
- $V(\mathcal{C}) + V(\mathcal{D}) \leq V(\mathcal{C} \wedge \mathcal{D})$.

Si osservi che, denotato con $\mathcal{L}(\mathbb{B}(m))$ il reticolo dei sottospazi di $\mathbb{B}(m)$, l'applicazione

$$V : \mathcal{C} \in \mathbb{P}(m) \to V(\mathcal{C}) \in \mathcal{L}(\mathbb{B}(m))$$

è un $\vee$-monomorfismo duale e non è suriettiva. In particolare, si ha:

Proposizione 1.0.4 [15] *Sia W un sottospazio di $\mathbb{B}(m)$ e sia $\{b_{C_1}, \ldots, b_{C_k}\}$ una sua base. $W \in Im(V)$ se e solo se la partizione $\mathcal{C} = b_{C_1} \wedge \cdots \wedge b_{C_k}$ ha $k+1$ blocchi ed in tal caso si ha $W = V(\mathcal{C})$.*

E' possibile definire in modo naturale un'applicazione che ad ogni sottoinsieme A di I associa un sottospazio di $\mathbb{B}(m)$ coordinato rispetto alla base ridondante $\{p_i \mid i \in A\}$

$$A \to V_A = \langle p_i \mid i \in A \rangle.$$

Tale applicazione diviene biettiva se ristretta ai sottoinsiemi regolari di I. Dal lemma 1.0.3 segue che

$$V_A = V(p_A) = \{b_E \in \mathbb{B}(m) \mid b_E \geq p_A\},$$

di conseguenza si ha:

Lemma 1.0.5 *Se A, B sono sottoinsiemi regolari di I allora*:

- $V_A + V_B = V_{A \cup B}$;
- $V_A \cap V_B = V_{A \cap B}$ *se* $A \cup B \subset I$, $V_A \cap V_B = V_{A \cap B} + \langle b_A \rangle = V_{A \cap B} + \langle b_B \rangle$ *altrimenti.*

E' evidente che un endomorfismo $\mathcal{E}$ di $\mathbb{B}(m)$ è univocamente determinato dai valori che assume in corrispondenza delle bipartizioni puntate. Si dirà che una m-upla di bipartizioni $(b_{E_1}, \ldots, b_{E_m})$ rappresenta $\mathcal{E}$ e si scriverà $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \ldots, b_{E_m})$ se e solo se $b_{E_i} = \mathcal{E}(p_i)$ per ogni $i \in I$.

E' semplice osservare che valgono i seguenti:

Lemma 1.0.6 *Una m-upla di bipartizioni $(b_{E_1}, \ldots, b_{E_m})$ rappresenta un endomorfismo $\mathcal{E}$* di $\mathbb{B}(m)$ *se e solo se $\sum\limits_{i \in I} b_{E_i} = 0$ ed in tal caso si ha $\mathcal{E}(b_F) = \sum\limits_{i \in F} b_{E_i} = \sum\limits_{i \in I \setminus F} b_{E_i}$ per ogni $b_F \in \mathbb{B}(m)$.*

Lemma 1.0.7 *Se $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \ldots, b_{E_m})$ e $\mathcal{F} = (b_{F_1}, \ldots, b_{F_m})$ sono due endomorfismi di $\mathbb{B}(m)$, allora*:

(i) $\mathcal{E} \cdot \mathcal{F} = (\sum\limits_{i \in F_1} b_{E_i}, ..., \sum\limits_{i \in F_m} b_{E_i})$;

(ii) *$\mathcal{E}$ è un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$ se e solo se $(b_{E_1}, \ldots, b_{E_m})$ è ammissibile*;

(iii) *se $\mathcal{E}$ è un automorfismo allora $\mathcal{F}$ è l'inverso di $\mathcal{E}$ se e solo se $\sum\limits_{i \in F_j} b_{E_i} = p_j$ per ogni $j \in I$.*

Lemma 1.0.8 *Se* $(b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ *è una* m*-upla di bipartizioni ammissibile allora* $\bigwedge_{i \neq j} b_{E_i} = \{\{1\}, \dots, \{m\}\}$ *per ogni* $j \in I$.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $m-1$ su un campo K.

Se $B = \{b_i \mid i \in I\}$ è una base ridondante di V, è semplice verificare che la partizione di I che si ottiene a partire dall'espressione di un elemento v di V come combinazione lineare degli elementi di B, mettendo in uno stesso blocco indici per i quali i coefficienti sono uguali, non dipende dalla particolare combinazione scelta. Denotata, allora, con $part_B(v)$, tale partizione, e posto per ogni $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\} \in \mathbb{P}(m)$

$$V(\mathcal{C}) = \{v \in V \mid part_B(v) \geq \mathcal{C}\},$$

e per ogni $A \in \wp_R(m)$

$$V_A = \langle b_i \mid i \in A \rangle = V(p_A),$$

sussistono per V gli analoghi dei lemmi 1.0.3 e 1.0.5 (chiaramente sostituendo $\sum_{i \in E} b_i$ a b_E).

Sia $V^{|}$ uno spazio vettoriale di dimensione $m-1$ su K e $B^{|} = \{b_i^{|} \mid i \in I\}$ una sua base ridondante. Se $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ è un endomorfismo di $\mathbb{B}(m)$, l'omomorfismo $\mathcal{E}^* : V \to V^{|}$ definito da $\mathcal{E}^*(b_i) = \sum_{j \in E_i} b_j^{|}$ è rappresentato rispetto a B e $B^{|}$ da tutte e sole le $\mathbb{Z}_2$-matrici che rappresentano la m-upla di bipartizioni $(b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$. E' semplice osservare che gli $\mathcal{E}^*$, al variare di $\mathcal{E}$ in $End(\mathbb{B}(m))$, sono tutti e soli gli omomorfismi da V in $V^{|}$ rappresentati rispetto a B e $B^{|}$ da $\mathbb{Z}_2$-matrici. Chiaramente, $\mathcal{E}$ è un automorfismo se e solo se $\mathcal{E}^*$è un isomorfismo.

1.1 Il dominio di un automorfismo di $\mathbb{B}$(m)

Per ogni sottoinsieme regolare A di I e per ogni partizione $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ di I, si pone

$$\mathcal{C}(A) = (\bigwedge_{i \in I \setminus C_1} \delta_A(i)) \vee \cdots \vee (\bigwedge_{i \in I \setminus C_k} \delta_A(i)).$$

E' immediato osservare che

Lemma 1.1.1 *Per ogni* $A \in \wp_R(m)$ *e* $\mathcal{C}$, $\mathcal{D} \in \mathbb{P}(m)$, *si ha*:

- $\mathcal{C}(A) = 1$ *se e solo se* A *contiene un co-blocco di* $\mathcal{C}$ *ossia se e solo se* $p_A \leq \mathcal{C}$;

- *se* $\mathcal{C} \leq \mathcal{D}$ *allora* $\mathcal{C}(A) \leq \mathcal{D}(A)$

Di conseguenza si ha:

Lemma 1.1.2 *Sia* b_E *una bipartizione e* A *un sottoinsieme regolare di* I. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti*:

(i) $b_E(A) = 1$;

(ii) $E^{-1} \subseteq A$ *o* $E \subseteq A$;

(iii) $b_E \geq p_A$;

(iv) $b_E \in V_A$.

Per ogni m-upla di partizioni $(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m)$ di I e per ogni sottoinsieme regolare A di I, si pone

$$(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m)(A) = \{i \in I \mid \mathcal{C}_i(A) = 1\}.$$

Sia $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$. E' semplice verificare che l'applicazione

$$\mathcal{E} : A \in \wp_R(m) \to \mathcal{E}(A) \in \wp_R(m)$$

è ben definita e che $\mathcal{E}(\emptyset) = \emptyset$ e $\mathcal{E}(I) = I$. Inoltre, dal lemma 1.1.2(iv), segue che $\mathcal{E}(A) = \{i \in I \mid b_{E_i} \in V_A\}$ e di conseguenza $\langle b_{E_i} \mid i \in \mathcal{E}(A)\rangle \leq V_A$. Ne deriva:

Proposizione 1.1.3 [15] *Per ogni sottoinsieme regolare* A *di* I, *si ha*:

- $|\mathcal{E}(A)| \leq |A|$;
- $|\mathcal{E}(A)| = |A|$ *se e solo se* $\mathcal{E}(V_{\mathcal{E}(A)}) = \langle b_{E_i} | \ i \in \mathcal{E}(A)\rangle = V_A$.

L'insieme dei sottoinsiemi regolari A di I tali che $|\mathcal{E}(A)| = |A|$ sarà chiamato *dominio* di $\mathcal{E}$ e verrà denotato con $D(\mathcal{E})$.

Siano $(b_{E_1}, \dots, b_{E_n})$ una n-upla di bipartizioni di $\{1, \dots, m\}$ e $(b_{F_1}, \dots, b_{F_m})$ una m-upla di bipartizioni di $\{1, \dots, n\}$. Posto, per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$\mathcal{A}_i = \bigwedge_{j \in F_i} b_{E_j} \ \text{ e } \ \mathcal{C}_i = \bigwedge_{j \in I \setminus F_i} b_{E_j},$$

la m-upla di partizioni $(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{A}_m \vee \mathcal{C}_m)$ si denota con

$$(b_{E_1}, \dots, b_{E_n}) * (b_{F_1}, \dots, b_{F_m}).$$

Siano $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ e $\mathcal{F} = (b_{F_1}, \dots, b_{F_m})$ due automorfismi di $\mathbb{B}(m)$. Vale il seguente:

Lemma 1.1.4 [15] *Se* A *è un sottoinsieme regolare di* I *allora*

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}(A)) = \{i \in I \mid \mathcal{A}_i(A) \vee \mathcal{C}_i(A) = 1\}.$$

Dim. Per definizione i $\in \mathcal{F}(\mathcal{E}(A))$ se e solo se $b_{F_i}(\mathcal{E}(A)) = 1$ ossia se e solo se $\mathcal{E}(A)$ contiene o F_i o F_i^{-1}. Ora, $F_i \subseteq \mathcal{E}(A)$ se e solo se per ogni $j \in F_i$ si ha $b_{E_j} \geq p_A$ ossia $\bigwedge_{j \in F_i} b_{E_j} \geq p_A$ e dunque $\mathcal{A}_i(A) = 1$. Analogamente si osserva che $F_i^{-1} \subseteq \mathcal{E}(A)$ equivale a $\mathcal{C}_i(A) = 1$. In definitiva, si ha allora che i $\in \mathcal{F}(\mathcal{E}(A))$ se e solo se $\mathcal{A}_i(A) \vee \mathcal{C}_i(A) = 1$. $\square$

Pertanto, da $\mathcal{E} * \mathcal{F} = (\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{A}_m \vee \mathcal{C}_m) \leq (\sum_{i \in F_1} b_{E_i}, ..., \sum_{i \in F_m} b_{E_i}) = \mathcal{E} \cdot \mathcal{F}$, segue:

Proposizione 1.1.5 [15] *Se A è un sottoinsieme regolare di I allora*

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}(A)) \subseteq (\mathcal{E} * \mathcal{F})(A) \subseteq (\mathcal{E} \cdot \mathcal{F})(A).$$

Corollario 1.1.6 [15] *Se $\mathcal{F}$ è l'inverso di $\mathcal{E}$ e A è un sottoinsieme regolare di I allora valgono le seguenti*:

(i) $\mathcal{F}(\mathcal{E}(A)) \subseteq (\mathcal{E} * \mathcal{F})(A) \subseteq A$;

(ii) $\mathcal{F}(\mathcal{E}(A)) = (\mathcal{E} * \mathcal{F})(A) = A$ *se e solo se* $A \in D(\mathcal{E})$.

Dim. (i) Segue immediatamente dalla proposizione precedente tenuto conto che $(\sum_{i \in F_1} b_{E_i}, ..., \sum_{i \in F_m} b_{E_i}) = (p_1, ..., p_m)$.

(ii) Se $\mathcal{F}(\mathcal{E}(A)) = A$, da $|\mathcal{F}(\mathcal{E}(A))| \leq |(\mathcal{E} * \mathcal{F})(A)| \leq |A|$ segue immediatamente che $A \in D(\mathcal{E})$. Viceversa, se $A \in D(\mathcal{E})$ allora $V_A = \langle b_{E_i} \mid i \in \mathcal{E}(A) \rangle$ e di conseguenza se $i \in A$ allora o F_i o F_i^{-1} è incluso in $\mathcal{E}(A)$. Se $F_i \subseteq \mathcal{E}(A)$ allora $b_{E_j} \geq p_A$ per ogni $j \in F_i$ ossia, $\bigwedge_{j \in F_i} b_{E_j} \geq p_A$ e di conseguenza $\mathcal{A}_i(A) = 1$; analogamente, se $F_i^{-1} \subseteq \mathcal{E}(A)$ allora $\mathcal{C}_i(A) = 1$. Pertanto, $\mathcal{A}_i(A) \vee \mathcal{C}_i(A) = 1$ per ogni $i \in A$ ossia $A \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{E}(A))$. Dalla validità generale di $\mathcal{F}(\mathcal{E}(A)) \subseteq (\mathcal{E} * \mathcal{F})(A) \subseteq A$ segue allora $\mathcal{F}(\mathcal{E}(A)) = (\mathcal{E} * \mathcal{F})(A) = A$. $\square$

Dalla (ii) della proposizione precedente segue che $A \in D(\mathcal{E})$ se e solo se $\mathcal{A}_i(A) \vee \mathcal{C}_i(A) = 1$ per ogni $i \in A$; esplicitando ciò si perviene alla seguente caratterizzazione degli elementi del dominio di $\mathcal{E}$:

Corollario 1.1.7 *Sia A un sottoinsieme regolare di I. $A \in D(\mathcal{E})$ se e solo se A^{-1} è incluso o in un blocco di $\mathcal{A}_i$ o in un blocco di $\mathcal{C}_i$ per ogni $i \in A$.*

2 Tende

Un insieme di sottoinsiemi regolari di I non vuoti, contenente I, si dice *m-tenda* (tenda se m è sottointeso). E' evidente che, per le identificazioni fatte in precedenza, è possibile rappresentare una m-tenda d'ordine k con una matrice $(m \times k)$ su $\mathbb{Z}_2$ senza ripetizioni di colonne, con una colonna formata da tutti 1 e priva di colonne con un unico 0 o formate da tutti 0. Chiaramente tale matrice è identificata a meno di permutazioni delle colonne.

Assegnare una m-tenda ordinata equivale ad assegnare una rappresentazione $(W_1, \ldots, W_k)$ di uno spazio vettoriale V di dimensione $m-1$ coordinata rispetto ad una base ridondante B, infatti, in tal caso, ogni $W_i = V_{A_i}$ dove A_i è un sottoinsieme regolare di I. Inoltre, come si vedrà nell'ultimo paragrafo di questo capitolo, assegnare una m-tenda equivale anche ad assegnare l'insieme dei primi di un *$\mathcal{T}$-morfismo* (particolari $\wedge$-morfismi da $\mathbb{P}(m)$ al reticolo dei tipi) ovvero una classe d'isomorfismo nella categoria che li ha come oggetti.

Sia $\mathcal{E}$ un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$. Per quanto osservato in precedenza, l'applicazione

$$\boldsymbol{T} \to \mathcal{E}(\boldsymbol{T}) = \{\mathcal{E}(A) \mid A \in \boldsymbol{T}\}$$

è una trasformazione nell'insieme delle m-tende.

Si dice che $\mathcal{E}$ è un *cambio-base* per la tenda $\boldsymbol{T}$ se l'azione di $\mathcal{E}$ su $\boldsymbol{T}$ è invertibile, ossia se denotato con $\mathcal{F}$ l'inverso di $\mathcal{E}$, si ha

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}((\boldsymbol{T})) = \boldsymbol{T},$$

equivalentemente se $\mathcal{F}(\mathcal{E}(A)) = A$ per ogni $A \in \boldsymbol{T}$.

Pertanto, si dice che $\mathcal{E}$ è un cambio-base fra due tende $\boldsymbol{T}_1$ e $\boldsymbol{T}_2$ se $\mathcal{E}$ è un cambio-base di $\boldsymbol{T}_1$ e $\mathcal{E}(\boldsymbol{T}_1) = \boldsymbol{T}_2$. Chiaramente, $\mathcal{E}$ è un cambio-base fra $\boldsymbol{T}_1$ e $\boldsymbol{T}_2$ se e solo se $\mathcal{F}$ è un cambio base fra $\boldsymbol{T}_2$ e $\boldsymbol{T}_1$. Dal corollario 1.1.6 segue allora che

Proposizione 2.0.1 *$\mathcal{E}$ è un cambio-base per la tenda $\boldsymbol{T}$ se e solo se $\boldsymbol{T} \subseteq D(\mathcal{E})$.*

Corollario 2.0.2 *Siano $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ due automorfismi di $\mathbb{B}(m)$ e $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$, $\boldsymbol{T}_3$ tre tende. Allora:*

(i) *se $\mathcal{E}{\cdot}\mathcal{F}$ è un cambio-base per $\boldsymbol{T}$ allora $(\mathcal{E}{\cdot}\mathcal{F})(\boldsymbol{T}) = \mathcal{F}(\mathcal{E}(\boldsymbol{T}))$;*

(ii) *se $\mathcal{F}$ è un cambio-base fra $\boldsymbol{T}_1$ e $\boldsymbol{T}_2$ e $\mathcal{E}$ è un cambio-base fra $\boldsymbol{T}_2$ e $\boldsymbol{T}_3$ allora $\mathcal{E}{\cdot}\mathcal{F}$ è un cambio base fra $\boldsymbol{T}_1$ e $\boldsymbol{T}_3$;*

(iii) *se $\mathcal{E}$ è un cambio-base per $\boldsymbol{T}$ e $\mathcal{F}$ è l'inverso di $\mathcal{E}$ allora $(\mathcal{E} * \mathcal{F})(A) = A$ per ogni $A \in \boldsymbol{T}$.*

Ad ogni m-tenda è possibile associare una m-upla di partizioni di I.

Definizione 2.0.3 *Sia $\boldsymbol{T}$ una m-tenda. Posto, per ogni $i \in I$,*

$$part_{\boldsymbol{T}}(t_i) = \vee\{p_A \mid A \in \boldsymbol{T} \text{ e } i \in A\},$$

la m-upla di partizioni

$$(part_{\boldsymbol{T}}(t_1), \ldots, part_{\boldsymbol{T}}(t_m))$$

si dice base di partizioni della tenda $\boldsymbol{T}$.

Le basi di partizioni verranno caratterizzate nel quinto capitolo.

Lemma 2.0.4 *Se $\boldsymbol{T}$ una m-tenda allora*

$$(part_{\boldsymbol{T}}(t_1), \ldots, part_{\boldsymbol{T}}(t_m)) \leq (p_1, \ldots, p_m).$$

Siano $\boldsymbol{T}_1$ e $\boldsymbol{T}_2$ tende. $\boldsymbol{T}_2$ si dice una *sotto-tenda* di $\boldsymbol{T}_1$ se $\boldsymbol{T}_2 \subseteq \boldsymbol{T}_1$.

Lemma 2.0.5 *Se $\boldsymbol{T}_2$ è una sotto-tenda di una tenda $\boldsymbol{T}_1$ allora*

$$(part_{\boldsymbol{T}_2}(t_1), \ldots, part_{\boldsymbol{T}_2}(t_m)) \leq (part_{\boldsymbol{T}_1}(t_1), \ldots, part_{\boldsymbol{T}_1}(t_m)).$$

Una tenda si dice *indecomponibile* se la sua base di partizioni è $(p_1, \ldots, p_m)$. Chiaramente, una tenda $\boldsymbol{T}$ è decomponibile se almeno per un indice $i \in I$ si ha $part_{\boldsymbol{T}}(t_i) < p_i$. Una m-upla ammissibile di bipartizioni $\mathcal{E}$ si dice indecomponibile se è indecomponibile la tenda $D(\mathcal{E})\backslash\{\emptyset\}$.

Corollario 2.0.6 *Ogni tenda che contiene una tenda indeconponibile è indecomponibile. Pertanto, se $\mathcal{E}$ è un cambio-base di una tenda indecomponibile allora $\mathcal{E}$ è indecomponibile.*

2.1 Fattorizzazione in scambi

Uno *scambio* è un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$ che fissa $m-2$ vettori della base ridondante $\{p_1, ..., p_m\}$. E' immediato osservare che se $\mathcal{S}$ è uno scambio allora

$$\mathcal{S} = (p_1, \ldots, p_{i-1}, b_{i\cup X}, p_{i+1}, \ldots, p_{j-1}, b_{j\cup X}, p_{j+1}, \ldots, p_m)$$

per opportuni $i \neq j \in I$ e $X \subseteq I\backslash\{i,j\}$: tale scambio si denota con $\mathcal{S}(i,j,X)$. Per ogni $i, j \in I$, $\mathcal{S}(i,j,\emptyset)$ è l'identità di $\mathbb{B}(m)$ e $\mathcal{S}(i,j,I\backslash\{i,j\})$ è l'automorfismo trasposizione di $\mathbb{B}(m)$ che scambia p_i e p_j: tali scambi si dicono banali.

Proposizione 2.1.1 [16] *Sia $\mathcal{S} = \mathcal{S}(i,j,X)$ uno scambio. Denotato con $X^{'}$ l'insieme $(I\backslash\{i,j\})\backslash X$, valgono le seguenti proposizioni*:

(i) *Un sottoinsieme regolare A di I appartiene al dominio di $\mathcal{S}$ se e solo se si verifica una delle seguenti eventualità*:

- $A \subseteq I\backslash\{i,j\}$,
- $X \subseteq A$,
- $X^{'} \subseteq A$.

(ii) *Il dominio di $\mathcal{S}$ coincide con il dominio di $\mathcal{S}^{'} = \mathcal{S}(i,j,X^{'})$ e $\mathcal{S}\cdot\mathcal{S}^{'} = \mathcal{S}^{'}\cdot\mathcal{S} = \mathcal{S}(i,j,I\backslash\{i,j\})$.*

(iii) *Se $A \in D(\mathcal{S})$ allora* :

- $\mathcal{S}(A) = \{i\} \cup (A - \{j\})$ *se* $\{j\} \cup X^{'} \subseteq A$ *e* $i \notin A$,
- $\mathcal{S}(A) = \{j\} \cup (A - \{i\})$ *se* $\{i\} \cup X^{'} \subseteq A$ *e* $j \notin A$,
- $\mathcal{S}(A) = A$ *nei restanti casi.*

Dim. (i) Non è difficile controllare che se per un insieme A ha luogo una delle tre eventualità allora A appartiene al dominio di $\mathcal{S}$. D'altra parte, se $A \in D(\mathcal{S})$ e $i \in A$, (risp. $j \in A$), allora $E_i = \{i\} \cup X \subseteq A$ (risp. $E_j = \{j\} \cup X \subseteq A$) o $E_j^{-1} = \{i\} \cup X^{'} \subseteq A$ (risp. ${E_i}^{-1} = \{j\} \cup X^{'} \subseteq A$).

(ii) Segue immediatamente dalla (i).

(iii) Se $A \cap \{i,j\} = \emptyset$ allora $p_h(A) = 1$ per ogni $h \in A$ e dunque $\mathcal{S}(A) = A$. Se $\{j\} \cup X^{'} \subseteq A$ e $i \notin A$ allora $E_i \subseteq A$ ed avendosi $p_h(A) = 1$ per ogni $h \in A - \{j\}$, si ha $\mathcal{S}(A) = \{i\} \cup (A - \{j\})$. Il caso $\{i\} \cup X^{'} \subseteq A$ e $j \notin A$ è analogo. Infine, se $i, j \in A$ allora A include o E_i e E_j, o ${E_i}^{-1}$ e ${E_j}^{-1}$ ed è pertanto semplice osservare che $\mathcal{S}(A) = A$. $\square$

La (i) della proposizione precedente ha come conseguenza che, posto $\widehat{A} = A\backslash\{i,j\}$ e denotata con $p_{\widehat{A}}$ la partizione puntata su $\widehat{A}$ dell'insieme $I\backslash\{i,j\}$, si ha:

Corollario 2.1.2 *Sia $\mathcal{S}(i,j,X)$ uno scambio e $\boldsymbol{T}$ una tenda.*
$\mathcal{S}$ è un cambio-base per $\boldsymbol{T}$ se e solo se $\vee\{p_{\widehat{A}} \mid A \cap \{i,j\} \neq \emptyset$ e $A \in \boldsymbol{T}\} \leq \{X, X^{'}\}$.

Dai prossimi risultati è possibile ricavare un algoritmo che consente di ottenere la fattorizzazione in scambi di ogni automorfismo di $\mathbb{B}(m)$.

Lemma 2.1.3 [16] *Sia $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \ldots, b_{E_m})$ una m-upla ammissibile di bipartizioni e sia $j \in I$. Se per ogni $i \neq j$, $b_{E_i} \wedge b_{E_j}$ è una tripartizione allora b_{E_i} è una bipartizione puntata.*

Dim. Per ipotesi, non lede la generalità supporre che, per ogni $i \neq j$, o $E_i \subset E_j$ o $E_i \subset E_j^{-1}$. Posto $S = \{i \in I \mid E_i \subset E_j\}$ e $T = \{i \in I \mid E_i \subset E_j^{-1}\}$, si ha $0 = \sum\limits_{i \in I} b_{E_i} = b_{E_j} + \sum\limits_{i \in S} b_{E_i} + \sum\limits_{i \in T} b_{E_i} = b_{E_j} + b_C + b_D$ dove $C \subseteq E_j$ e $D \subseteq E_j^{-1}$. Allora, dall'ammissibilità di $\mathcal{E}$, segue che o $S = I \backslash \{j\}$ o $T = I \backslash \{j\}$. Se $S = I \backslash \{j\}$ allora E_j contiene un co-blocco di $\bigwedge\limits_{i \neq j} b_{E_i}$ e di conseguenza per il lemma 1.0.8 b_{E_j} è una partizione puntata. Il caso $T = I \backslash \{j\}$ è analogo. $\square$

Proposizione 2.1.4 [16] *Sia $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \ldots, b_{E_m})$ un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$. Se $b_{E_i} \wedge b_{E_j}$ è una quadripartizione allora esiste un sottoinsieme X non banale di $I \backslash \{i,j\}$, tale che*

$$b_{E_i \cap E_j} = \sum_{h \in X} b_{E_h}$$

o

$$b_{E_i \cap E_j^{-1}} = \sum_{h \in X} b_{E_h}$$

Denotato, allora, con $\mathcal{S}$ lo scambio $\mathcal{S}(i,j,X)$, posto $E_h^{'} = E_h$ per ogni $h \neq i,j$, e

$$E_i^{'} = E_i \cap E_j^{-1},$$
$$E_j^{'} = E_i^{-1} \cap E_j,$$

nel primo caso;

$$E_i^{'} = E_i \cap E_j,$$
$$E_j^{'} = E_i^{-1} \cap E_j^{-1},$$

nel secondo; *si ha:*

(i) $\mathcal{E}^{'} = (b_{E_1^{'}}, \ldots, b_{E_m^{'}})$ *è un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$,*

(ii) $\mathcal{E}^{'} \cdot \mathcal{S} = \mathcal{E}$,

(iii) $D(\mathcal{E}) \subseteq D(\mathcal{E}^{'})$,

(iv) $|\{(i,j) \mid |b_{E'_i} \wedge b_{E'_j}| = 4\}| < |\{(i,j) \mid |b_{E_i} \wedge b_{E_j}| = 4\}|$.

Dim. Non lede la generalità supporre di trovarsi nel primo caso. La (i) e la (ii) sono immediate.

(iii) Sia $H \in D(\mathcal{E})$. Se $\mathcal{E}(H) \cap \{i,j\} = \emptyset$ o $\{i,j\} \subseteq \mathcal{E}(H)$ allora è semplice verificare che $\mathcal{E}(H) = \mathcal{E}'(H)$. Se $i \in \mathcal{E}(H)$ e $j \notin \mathcal{E}(H)$ allora o $E_i \subseteq H$ e quindi $\mathcal{E}'(H) = \mathcal{E}(H)$, o $E_i^{-1} \subseteq H$ e di conseguenza $\mathcal{E}'(H) = \{j\} \cup (\mathcal{E}(H) - \{i\})$. Ad una conclusione analoga si perviene nel caso in cui $j \in \mathcal{E}(H)$ e $i \notin \mathcal{E}(H)$. Pertanto, in ogni caso, si ha $|\mathcal{E}'(H)| = |\mathcal{E}(H)| = |H|$ e dunque $H \in D(\mathcal{E}')$.

(iv) E' sufficiente osservare che, se $h \neq i,j$, e o $b_{E_h} \wedge b_{E_j}$ o $b_{E_h} \wedge b_{E_i}$ è una tripartizione allora almeno una fra $b_{E'_h} \wedge b_{E'_j}$ e $b_{E'_h} \wedge b_{E'_i}$ lo è, e che nel caso in cui lo sono entrambe allora anche $b_{E'_h} \wedge b_{E'_j}$ e $b_{E'_h} \wedge b_{E'_i}$ lo sono.

Se $b_{E_h} \wedge b_{E_i}$ è una tripartizione allora non lede la generalità supporre che o $E_h \subseteq E_i$ o $E_h \subseteq E_i^{-1}$. Se $E_h \subseteq E_i$ allora dal fatto che $E_i \subseteq I \backslash E'_j$ segue che $b_{E'_h} \wedge b_{E'_j}$ è una tripartizione; se, invece, $E_h \subseteq E_i^{-1}$ allora $E'_h \subseteq E_i^{-1}$ e di conseguenza $b_{E'_h} \wedge b_{E'_i}$ è una tripartizione. Il caso in cui $b_{E_h} \wedge b_{E_j}$ è una tripartizione è analogo.

Infine, non è difficile controllare che se $b_{E_h} \wedge b_{E_j}$ e $b_{E_h} \wedge b_{E_i}$ sono entrambe tripartizioni allora un blocco di b_{E_h} è incluso in un blocco di $b_{E_j} \wedge b_{E_i}$ e pertanto $b_{E'_h} \wedge b_{E'_j}$ e $b_{E'_h} \wedge b_{E'_i}$ sono entrambe tripartizioni. $\square$

2.1.5 Algoritmo per la fattorizzazione in scambi.

Sia $\mathcal{E}$ un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$. Se $Q(\mathcal{E}) = |\{(i,j) \mid |b_{E_i} \wedge b_{E_j}| = 4\}| \neq \emptyset$ allora esiste una coppia di indici (i,j) per i quali $b_{E_i} \wedge b_{E_j}$ è una quadri-partizione, pertanto, applicando la proposizione precedente, si ottiene:

- $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{S}_1$,
- $D(\mathcal{E}) \subseteq D(\mathcal{E}_1)$,
- $|Q(\mathcal{E}_1)| < |Q(\mathcal{E})|$;

se anche $Q(\mathcal{E}_1) \neq \emptyset$, allora procedendo per $\mathcal{E}_1$ analogamente a quanto fatto per $\mathcal{E}$ si ottiene che $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 \cdot \mathcal{S}_2$, $D(\mathcal{E}_2) \subseteq D(\mathcal{E}_1)$ e $|Q(\mathcal{E}_2)| < |Q(\mathcal{E}_1)|$; di conseguenza si ha:

- $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 \cdot \mathcal{S}_2 \cdot \mathcal{S}_1$,
- $D(\mathcal{E}) \subseteq D(\mathcal{E}_1) \subseteq D(\mathcal{E}_2)$,
- $|Q(\mathcal{E}_2)| < |Q(\mathcal{E}_1)| < |Q(\mathcal{E})|$.

Reiterando tale procedimento, si arriva ad un punto in cui $\mathcal{E} = \mathcal{E}_q \cdot \mathcal{S}_q \cdot \ldots \cdot \mathcal{S}_1$ e $Q(\mathcal{E}_q) = \emptyset$, con $q \leq (m-1)!$. Ma allora, per il lemma 2.1.3 le bipartizioni di $\mathcal{E}_q$ sono tutte puntate e pertanto $\mathcal{E}_q = \mathcal{S}_k \cdot \ldots \cdot \mathcal{S}_{q+1}$, dove $\mathcal{S}_k, \ldots, \mathcal{S}_{q+1}$ sono opportune traposizioni e $k - q \leq m - 1$. Dunque, in definitiva, si ha:

$$\mathcal{E} = \mathcal{S}_k \cdot \mathcal{S}_{k-1} \cdot \ldots \cdot \mathcal{S}_1$$

dove $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k$ sono scambi tali che

$$D(\mathcal{E}) = D(\mathcal{S}_k \cdot \ldots \cdot \mathcal{S}_1) \subseteq D(\mathcal{S}_k \cdot \ldots \cdot \mathcal{S}_2) \subseteq \cdots \subseteq D(\mathcal{S}_k \cdot \mathcal{S}_{k-1}) \subseteq D(\mathcal{S}_k). \ \square$$

Ne deriva la seguente:

Proposizione 2.1.6 [16] *Sia $\mathcal{E}$ un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$. $\mathcal{E}$ possiede una fattorizzazione in scambi*

$$\mathcal{E} = \mathcal{S}_k \cdot \mathcal{S}_{k-1} \cdot \ldots \cdot \mathcal{S}_1$$

con la proprietà che se $\mathcal{E}$ è un cambio-base per una tenda $\boldsymbol{T}$ allora $\mathcal{E}_i = \mathcal{S}_k \cdot \ldots \cdot \mathcal{S}_i$ è un cambio-base per $\boldsymbol{T}$ per ogni $i = 1, \ldots, k$.

Corollario 2.1.7 *Esiste un cambio base fra due tende $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{T}_1$ se e solo se*

$$\boldsymbol{T}_1 = \mathcal{S}_1(\mathcal{S}_2(\ldots(\mathcal{S}_{k-1}(\mathcal{S}_k(\boldsymbol{T})))$$

dove $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k$ sono scambi tali che

$$\boldsymbol{T} \subseteq D(S_k),\ \mathcal{S}_k(\boldsymbol{T}) \subseteq D(\mathcal{S}_{k-1}), \ldots, \mathcal{S}_2(\ldots(\mathcal{S}_k(\boldsymbol{T})) \subseteq D(\mathcal{S}_k).$$

2.1.8 Osservazione. Il corollario precedente suggerisce come calcolare tutte le tende che si ottengono a partire da una tenda $\boldsymbol{T}$ attraverso un cambio-base. Si procede come segue: si considerano tutti gli scambi che sono cambi-base per $\boldsymbol{T}$ e si trasforma $\boldsymbol{T}$ con ciascuno di tali scambi; a ciascuna delle tende così ottenute si riapplica il procedimento. Reiterando tale procedimento, con l'accortezza di non riapplicarlo ogni volta che si ottiene una tenda già ottenuta in precedenza, dopo un numero sufficiente di passi, si ottengono tutte le tende cercate. A ciascuna di tali tende corrisponde un cambio-base di $\boldsymbol{T}$; precisamente se $\boldsymbol{T}^{\,|} = \mathcal{S}_k(\ldots(\mathcal{S}_1(\boldsymbol{T}))$ allora il cambio-base corrispondente è $\mathcal{S}_1 \cdot \ldots \cdot \mathcal{S}_k$. $\square$

2.1.9 Osservazione. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione $m-1$ su $\mathbb{Z}_2$, è lecito assumere $V = \mathbb{B}(m)$ (a meno d'isomorfismi). Se $\mathcal{S}$ è uno scambio di $\mathbb{B}(m)$ allora $\mathcal{S}$ è una trasvezione di V che fissa un iperpiano coordinato. Ne deriva che l'algoritmo per la fattorizzazione in scambi di un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$ è un algoritmo più veloce di quello classico per ottenere una decomposizione in trasvezioni di un automorfismo di V. $\square$

2.2 Proprietà del dominio di un automorfismo di $\mathbb{B}$(m)

Sia $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \ldots, b_{E_m})$ un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$ e $\mathcal{F} = (b_{F_1}, \ldots, b_{F_m})$ il suo inverso. Come è stato osservato, se $A, B \in D(\mathcal{E})$ allora $\mathcal{E}(A), \mathcal{E}(B) \in D(\mathcal{F})$ e $|\mathcal{E}(A)| = |A|$ e $|\mathcal{E}(B)| = |B|$. Le prossime osservazioni descrivono il mutuo comportamento di $\mathcal{E}(A)$ e $\mathcal{E}(B)$ in funzione di quello di A e B. E' necessario fare alcune premesse.

Lemma 2.2.1 *Siano A, B due sottoinsiemi regolari di I, valgono le seguenti*:

(i) *se $A \subseteq B$ allora $\mathcal{E}(A) \subseteq \mathcal{E}(B)$;*

(ii) *se $A \cup B \subset I$ (equivalentemente $A^{-1} \cap B^{-1} \neq \emptyset$) allora $\mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B) = \mathcal{E}(A \cap B)$;*

(iii) *se $A \cup B = I$ (equivalentemente $A^{-1} \cap B^{-1} = \emptyset$) allora $\mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B) = \mathcal{E}(A \cap B) \cup \{i \in I \mid \exists\, \varepsilon \in \{1, -1\}$ t.c.$(A \setminus B) \subseteq E_i^{\varepsilon}$ e $(B \setminus A) \subseteq \mathcal{E}_i^{-\varepsilon}\}$;*

(iv) *se $A \in D(\mathcal{E})$ allora $\mathcal{E}(A) \in D(\mathcal{F})$;*

(v) *se $\mathcal{E}(A) \in D(\mathcal{F})$ allora esiste un $C \in D(\mathcal{E})$ tale che $C \subseteq A$ e $\mathcal{E}(C) = \mathcal{E}(A)$;*

(vi) *se $A, B \in D(\mathcal{E})$ allora $|\mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B)| - |\mathcal{E}(A)^{-1} \cap \mathcal{E}(B)^{-1}| = |A \cap B| - |A^{-1} \cap B^{-1}|$.*

Dim. La (i) è banale. La (ii) e la (iii) seguono immediatamente una volta osservato che se $i \in \mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B)$ allora $E_i^{\varepsilon} \subseteq A$ e $E_i^{\sigma} \subseteq B$ con $\varepsilon, \sigma \in \{1, -1\}$ e che se $\varepsilon \neq \sigma$ allora $A \cup B = I$, $(A \setminus B) \subseteq E_i^{\varepsilon}$ e $(B \setminus A) \subseteq E_i^{-\varepsilon}$.

(iv) Dal fatto che $\mathcal{F}(\mathcal{E}(A)) = A$ segue che $|\mathcal{F}(\mathcal{E}(A))| = |\mathcal{E}(A)|$ e di conseguenza $\mathcal{E}(A) \in D(\mathcal{F})$.

(v) Se $\mathcal{E}(A) \in D(\mathcal{F})$ allora $\mathcal{F}(\mathcal{E}(A)) \in D(\mathcal{E})$ e $\mathcal{F}(\mathcal{E}(A)) \subseteq A$.

(vi) Segue immediatamente dal fatto che $|\mathcal{E}(A)| = |A|$ e $|\mathcal{E}(B)| = |B|$. $\Box$

Lemma 2.2.2 *Siano $A, B \in D(\mathcal{E})$. Se $|A^{-1} \cap B^{-1}| \geq 2$ allora $A \cap B \in D(\mathcal{E})$ e $A \cup B \in D(\mathcal{E})$.*

Dim. Se, per assurdo $A \cap B \notin D(\mathcal{E})$ allora esiste un $i \in A \cap B$ tale che $F_i \subseteq \mathcal{E}(A)$ e $F_i^{-1} \subseteq \mathcal{E}(B)$. Ma allora, $\mathcal{E}(A) \cup \mathcal{E}(B) = I$ e di conseguenza si ha $\bigwedge_{j \in I} b_{E_j} \geq p_A \vee p_B = p_{(A \cap B)}$ il che è falso. Il fatto che $A \cup B \in D(\mathcal{E})$ segue in maniera ovvia. $\Box$

Corollario 2.2.3 *Se $A, B \in D(\mathcal{E})$ allora $|A^{-1} \cap B^{-1}| = n$ con $n \geq 2$ se e solo se $|\mathcal{E}(A)^{-1} \cap \mathcal{E}(B)^{-1}| = n$.*

Dim. Dai lemmi 2.2.1(ii) e 2.2.2 segue che $|\mathcal{E}(A \cap B)| = |A \cap B|$ e quindi per il lemma 2.2.2(iv) si ha $|A^{-1} \cap B^{-1}| = |\mathcal{E}(A)^{-1} \cap \mathcal{E}(B)^{-1}|$. L'implicazione inversa è analoga. $\Box$

Se $|A^{-1} \cap B^{-1}| = 1$ allora o $|\mathcal{E}(A)^{-1} \cap \mathcal{E}(B)^{-1}| = 1$ o $\mathcal{E}(A)^{-1} \cap \mathcal{E}(B)^{-1} = \emptyset$. Per le osservazioni fatte, è immediato verificare che il primo caso si presenta se e solo se $A \cap B \in D(\mathcal{E})$ e che in tal caso $\mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B) \in D(\mathcal{F})$. Nel secondo, allora, $A \cap B \notin D(\mathcal{E})$ ed è facile provare che $\mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B) \in D(\mathcal{F})$ se e solo esiste un $C \in D(\mathcal{E})$ tale che $C \subseteq A \cap B$ e $|C| = |A \cap B| - 1$.

Se $A^{-1} \cap B^{-1} = \emptyset$ allora o $\mathcal{E}(A)^{-1} \cap \mathcal{E}(B)^{-1} = \emptyset$ o $|\mathcal{E}(A)^{-1} \cap \mathcal{E}(B)^{-1}| = 1$. Denotato con $S = \{i \in I \mid \exists\, \varepsilon \in \{1, -1\}\ t.c.\ A \setminus B \subseteq E^{\varepsilon}\ e\ B \setminus A \subseteq E_i^{-\varepsilon}\}$, allora $\mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B) = \mathcal{E}(A \cap B) \cup S$. Quindi, $A \cap B \in D(\mathcal{E})$, nel primo caso se e solo se $S = \emptyset$ e di conseguenza $\mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B) \in D(\mathcal{F})$; nel secondo se e solo se $|S| = 1$ e di conseguenza $\mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B) \notin D(\mathcal{F})$. Se, invece, $A \cap B \notin D(\mathcal{E})$ allora $S \neq \emptyset$. Pertanto, o $|\mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B)| = |A \cap B|$ (equiv. $\langle b_{E_i} \mid i \in \mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B) \rangle < \langle p_i, b_A \mid i \in A \cap B \rangle$) e quindi $\mathcal{E}(A)^{-1} \cap \mathcal{E}(B)^{-1} = \varnothing$, o $|\mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B)| = |A \cap B| + 1$ (equiv. $\langle b_{E_i} \mid i \in \mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B) \rangle = \langle p_i, b_A \mid i \in A \cap B \rangle$) e quindi $|\mathcal{E}(A)^{-1} \cap \mathcal{E}(B)^{-1}| = 1$. In entrambi i casi è semplice verificare che $\mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B) \notin D(\mathcal{F})$.

Quanto osservato, consente di affermare che, per due elementi A, B di $D(\mathcal{E})$, si presentano le seguenti eventualità:

(1) $|A^{-1} \cap B^{-1}| \geq 2$;

(2) $|A^{-1} \cap B^{-1}| = 1$, $A \cap B \in D(\mathcal{E})$;

(3) $|A^{-1} \cap B^{-1}| = 1$, $A \cap B \notin D(\mathcal{E})$,

esiste $C \in D(\mathcal{E})$ tale che $C \subseteq A \cap B$ e $|C| = |A \cap B| - 1$;

(4) $|A^{-1} \cap B^{-1}| = 1$, $A \cap B \notin D(\mathcal{E})$,

non esiste $C \in D(\mathcal{E})$ tale che $C \subseteq A \cap B$ e $|C| = |A \cap B| - 1$;

(5) $A^{-1} \cap B^{-1} = \emptyset$, $A \cap B \in D(\mathcal{E})$,

$\{i \in I \mid \exists\, \varepsilon \in \{1, -1\}\ t.c.\ (A \setminus B) \subseteq E_i^{\varepsilon}\ e\ (B \setminus A) \subseteq E_i^{-\varepsilon}\} = \emptyset$;

(6) $A^{-1} \cap B^{-1} = \emptyset$, $A \cap B \in D(\mathcal{E})$,

$|\{i \in I \mid \exists\, \varepsilon \in \{1, -1\}\ t.c.\ (A \setminus B) \subseteq E_i^{\varepsilon}\ e\ (B \setminus A) \subseteq E_i^{-\varepsilon}\}| = 1$;

(7) $A^{-1} \cap B^{-1} = \emptyset$, $A \cap B \notin D(\mathcal{E})$,

$\langle b_{E_i} \mid i \in \mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B) \rangle < \langle p_i, b_A \mid i \in A \cap B \rangle$;

(8) $A^{-1} \cap B^{-1} = \emptyset$, $A \cap B \notin D(\mathcal{E})$,

$\langle b_{E_i} \mid i \in \mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B) \rangle = \langle p_i, b_A \mid i \in A \cap B \rangle$;

e che, di conseguenza vale la seguente:

Proposizione 2.2.4 *Se* $(1)', \ldots, (8)'$ *sono le relazioni analoghe alle* $(1), \ldots, (8)$, *ottenute sostituendo* A *con* B, $\mathcal{E}(A)$ *con* $\mathcal{E}(B)$, $\mathcal{E}$ *con* $\mathcal{F}$, *allora sussistono le seguenti equivalenze*: $(1) \Leftrightarrow (1)'$; $(2) \Leftrightarrow (2)'$; $(3) \Leftrightarrow (6)'$; $(4) \Leftrightarrow (8)'$; $(5) \Leftrightarrow (5)'$; $(6) \Leftrightarrow (3)'$; $(7) \Leftrightarrow (7)'$; $(8) \Leftrightarrow (4)'$.

Sia $\boldsymbol{T}$ una tenda. Un sottoinsieme $\boldsymbol{C}$ di $\boldsymbol{T}$ si dice una *catena* di $\boldsymbol{T}$ se esiste una permutazione $C_1, \ldots, C_r$, degli elementi di $\boldsymbol{C}$ tale che:

- $C_i^{-1} \cap C_j^{-1} = \emptyset$ per ogni $i \in \{2, \ldots, r-1\}$ e per ogni $j \neq i-1, i, i+1$;
- $C_1^{-1} \cap C_j^{-1} = \emptyset$ per ogni $j \neq 1, 2, r$;
- $C_r^{-1} \cap C_j^{-1} = \emptyset$ per ogni $j \neq 1, r-1, r$;
- $X_i = C_i^{-1} \cap C_{i+1}^{-1} \neq \emptyset$ per ogni $i = 1, \ldots, r-1$.

C_1 e C_r si dicono *estremi* della catena $\boldsymbol{C}$. Se $X_r = C_1^{-1} \cap C_r^{-1} \neq \emptyset$ allora la catena $\boldsymbol{C}$ si dice *chiusa*. E' evidente che, per definizione, i sottoinsiemi X_i sono a due a due disgiunti.

Proposizione 2.2.5 *Se* $\boldsymbol{C} = \{C_1, \ldots, C_r\}$ *è una catena chiusa di* $D(\mathcal{E})$ *allora valgono le seguenti*:

(i) $C_1 \cap \cdots \cap C_r \in D(\mathcal{E})$;

(ii) $\{\mathcal{E}(C_1), \ldots, \mathcal{E}(C_r)\}$ *è una catena chiusa di* $D(\mathcal{F})$.

Dim. E' semplice verificare che, poiché $C_i \cap C_j \in D(\mathcal{E})$ se $|C_i^{-1} \cap C_j^{-1}| \geq 2$, non lede la generalità supporre che $C_1^{-1} \cap C_2^{-1} = \{j_1\}$, $C_2^{-1} \cap C_3^{-1} = \{j_2\}, \ldots, C_{r-1}^{-1} \cap C_r^{-1} = \{j_{r-1}\}, C_r^{-1} \cap C_1^{-1} = \{j_r\}$.

(i) Sia $X = C_1 \cap \cdots \cap C_r$. Se $X = \emptyset$ allora $X \in D(\mathcal{E})$. Sia $X \neq \emptyset$ e per assurdo $X \notin D(\mathcal{E})$. Dal corollario 1.2.4 segue allora che esiste un $j \in X$ tale che X^{-1} non è incluso né in un blocco di $\mathcal{A}_j$ né in un blocco di $\mathcal{C}_j$ e quindi che esiste un indice $s \in \{1, \ldots, r\}$ tale che C_s^{-1} è incluso in un blocco di $\mathcal{A}_j$ e C_{s+1}^{-1} è incluso in un blocco di $\mathcal{C}_j$.

Senza ledere la generalità, sia $s = 1$. Dal fatto che $\mathbb{B}(m) = V(\mathcal{A}_j) + V(\mathcal{C}_j)$, segue che esiste $b_{\{j_1\} \cup A} \in V(\mathcal{A}_j)$ e un $b_{\{j_1\} \cup D} \in V(\mathcal{C}_j)$ tali che $p_1 = b_{\{j_1\} \cup A} + b_{\{j_1\} \cup D}$. Pertanto, si ha: $A \cap D = \emptyset$, $A \cup D \cup \{j_1\} = I$, $\mathcal{A}_j \leq \{\{j_1\} \cup A, D\}$ e $\mathcal{C}_j \leq \{\{j_1\} \cup D, A\}$ e di conseguenza $C_1^{-1} \subseteq A$ e $C_2^{-1} \subseteq D$. Ora, $j_2 \in C_2^{-1} \subseteq D$ e quindi appartenendo j_2 ad C_3^{-1}, ed essendo C_3^{-1} incluso o in un blocco di $\mathcal{A}_j$ o in un blocco di $\mathcal{C}_j$, necessariamente deve aversi che C_3^{-1} è incluso in D.

Procedendo analogamente per $j_4, \ldots, j_{r-1}$ si prova che C_r^{-1} è incluso in D e questo è assurdo in quanto comporterebbe che A_r^{-1} e A_1^{-1} sono inclusi in insiemi disgiunti.

(ii) Sia $B_j = \mathcal{E}(A_j)$ per ogni $j = 1, \dots, r$. Dalla (i) segue che $B_1 \cap \cdots \cap B_r = \mathcal{E}(X) \in D(\mathcal{F})$ e di conseguenza $|B_1 \cap \cdots \cap B_r| = |X|$. Non contenendo, per la (i), l'insieme $\{B_1, \dots, B_r\}$ propriamente alcuna catena chiusa di $D(\mathcal{F})$, ed essendo, per il corollario 2.2.4, $|B_i^{-1} \cap B_j^{-1}| \leq 1$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, r\}$, è semplice verificare che $\{B_1, \dots, B_r\}$ deve essere una catena chiusa di $D(\mathcal{F})$. $\square$

2.3 I cambi-base

Le osservazioni fatte nel paragrafo precedente consentono di enunciare la seguente:

Proposizione 2.3.1 *Se $\boldsymbol{T} = \{A_1, \dots, A_k\}$ è una tenda e $\mathcal{E}$ è un cambio-base per $\boldsymbol{T}$ allora, posto $B_i = \mathcal{E}(A_i)$ per ogni $i = 1, \dots, k$, e denotata con $\boldsymbol{T}'$ la tenda $\{B_1, \dots, B_k\}$, valgono le seguenti*:

(1) $|A_i| = |B_i|$ *per ogni* $i \in \{1, \dots, k\}$;

(2) $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\}$ *è una catena chiusa di $\boldsymbol{T}$ se e solo se $\{B_{i_1}, \dots, B_{i_r}\}$ è una catena chiusa di $\boldsymbol{T}'$*;

(3) $|A_i^{-1} \cap A_j^{-1}| = s \geq 2$ *se e solo se* $|B_i^{-1} \cap B_j^{-1}| = s$.

Dunque, è naturale domandarsi se il verificarsi per due tende $\boldsymbol{T} = \{A_1, \dots, A_k\}$ e $\boldsymbol{T}' = \{B_1, \dots, B_k\}$ delle condizioni (1), (2), (3), assicuri o meno l'esistenza di un cambio-base $\mathcal{E}$ fra di esse tale che $\mathcal{E}(A_i) = B_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$.
I prossimi risultati mostrano che la risposta è affermativa.

Se $\boldsymbol{T}$ è una tenda e $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{C}'$ sono catene di $\boldsymbol{T}$ allora $\boldsymbol{C}'$ si dice una *sotto-catena* di $\boldsymbol{C}$ se $\boldsymbol{C}' \subseteq \boldsymbol{C}$. E' semplice verificare che

Lemma 2.3.2 *Siano $\boldsymbol{T} = \{A_1, \dots, A_k\}$ e $\boldsymbol{T}' = \{B_1, \dots, B_k\}$ due tende che verificano le proprietà (1), (2), (3). Se $\boldsymbol{C}_1 = \{A_i \mid i \in J_1\}$ e $\boldsymbol{C}_2 = \{A_i \mid i \in J_2\}$ sono due catene chiuse di $\boldsymbol{T}$ allora una catena $\boldsymbol{C}_3 = \{A_i \mid i \in J_3\}$ è una sotto-catena di $\boldsymbol{C}_1$ e di $\boldsymbol{C}_2$ se e solo se $\boldsymbol{C}_3' = \{B_i \mid i \in J_3\}$ è una sotto-catena di $\boldsymbol{C}_1' = \{B_i \mid i \in J_1\}$ e di $\boldsymbol{C}_2' = \{B_i \mid i \in J_2\}$.*

Lemma 2.3.3 *Siano $\boldsymbol{T} = \{A_1, \dots, A_k\}$ e $\boldsymbol{T}' = \{B_1, \dots, B_k\}$ due tende che verificano le proprietà (1), (2), (3). Se $\boldsymbol{C} = \{A_i \mid i \in J\}$ è una catena chiusa di $\boldsymbol{T}$ allora esiste un cambio-base $\mathcal{E}$ di $\boldsymbol{T}$ con la proprietà che $|\mathcal{E}(A_j)^{-1} \cap \mathcal{E}(A_h)^{-1}| = |A_j^{-1} \cap A_h^{-1}|$ per ogni $j, h \in J$.*

Dim. Sfruttando il lemma precedente non è difficile verificare componendo opportuni scambi si ottiene un cambio-base di $\boldsymbol{T}$ con tale proprietà. $\square$

Proposizione 2.3.4 *Siano* $\boldsymbol{T} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ *e* $\boldsymbol{T}^{\shortmid} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ *due tende tali che* $|A_i^{-1} \cap A_j^{-1}| \leq 1$ *e* $|B_i^{-1} \cap B_j^{-1}| \leq 1$ *per ogni* $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. *Se valgono le seguenti*:

(1) $|A_i| = |B_i|$ *per ogni* $i \in \{1, \ldots, k\}$;

(2) $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_s}\}$ *è una catena chiusa di* $\boldsymbol{T}$ *se e solo se* $\{B_{i_1}, \ldots, B_{i_s}\}$ *è una catena chiusa di* $\boldsymbol{T}^{\shortmid}$;

a*llora, per ogni* $j \in \{1, \ldots, k\}$, *esiste un cambio-base* $\mathcal{E}_j$ *di* $\boldsymbol{T}$ *tale che* $\mathcal{E}_j(A_i) = B_i$ *per ogni* $i = 1, \ldots, j$.

Dim. Dal lemma precedente segue che non lede la generalità supporre che se $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_s}\}$ è una catena chiusa di $\boldsymbol{T}$ allora $|A_q^{-1} \cap A_h^{-1}| = 1$ se e solo se $|B_q^{-1} \cap B_h^{-1}| = 1$ per ogni $h, q \in \{i_1, \ldots, i_s\}$.

Si procede per induzione su j. Se $j = 1$ allora A_1 e B_1 hanno lo stesso ordine pertanto, componendo opportuni scambi banali si ottiene un cambio-base $\mathcal{E}_1$ di $\boldsymbol{T}$ tale che $\mathcal{E}_1(A_1) = B_1$.

Sia $2 \leq j < k$ e l'asserto vero per j. Si vuole provare che esiste un cambio-base $\mathcal{E}_{j+1}$ di $\boldsymbol{T}$ tale che $\mathcal{E}_{j+1}(A_i) = B_i$ per ogni $i = 1, \ldots, j+1$. L'ipotesi induttiva assicura che esiste un cambio-base $\mathcal{E}_j$ che trasforma la tenda $\boldsymbol{T}$ nella tenda $\boldsymbol{T}_j = \{B_1, \ldots, B_j, A^{\shortmid}_{j+1}, \ldots, A^{\shortmid}_k\}$. Pertanto, è sufficiente osservare che esiste un cambio-base $\mathcal{E}$ della tenda $\boldsymbol{T}_j$ tale che $\mathcal{E}(B_i) = B_i$ per ogni $i = 1, \ldots, j+1$.

Sia $\vee\{p_{B_i} \mid i \in \{1, \ldots, j\}\} = \{C_1, \ldots, C_p\}$ (chiaramente alcuni C_i potrebbero essere dei singleton). Se $\boldsymbol{C}$ è una catena di $\boldsymbol{T}_j$, per indicare che l'insieme $\cup\{A^{-1} \mid A \in \boldsymbol{C}\}$ è incluso in un blocco C_i si dirà brevemente che la catena $\boldsymbol{C}$ è *inclusa* in C_i.

Sia $i \in \{1, \ldots, p\}$, posto $A = A^{\shortmid}_{j+1}$ e $B = B_{j+1}$, iniziamo ad esaminare i seguenti casi:

1. $|A^{-1} \cap C_i| \geq 2$;

2. $|A^{-1} \cap C_i| = 1$ ed esiste una catena chiusa di $\boldsymbol{T}_j$ contenente A, una cui sotto-catena è *inclusa* in C_i;

3. $|A^{-1} \cap C_i| = 1$, $B^{-1} \cap C_i \neq \emptyset$ e non esiste una catena chiusa di $\boldsymbol{T}_j$ contenente A, una cui sotto-catena è *inclusa* in C_i.

1. Se $|A^{-1} \cap C_i| \geq 2$ allora $|A^{-1} \cap C_i| = |B^{-1} \cap C_i|$ ed esiste un cambio-base $\mathcal{E}$ della tenda $\boldsymbol{T}_j$ tale che $\mathcal{E}(A)^{-1} \cap C_i = B^{-1} \cap C_i$ e $\mathcal{E}(B_h) = B_h$ per ogni $h = 1, \ldots, j$. Proveremo ciò per il caso $|A^{-1} \cap C_i| = 2$ la dimostrazione nei restanti casi è analoga.

Sia $|A^{-1} \cap C_i| = \{i_1, i_2\}$. E' evidente che esiste una catena $\boldsymbol{C}$ di $\boldsymbol{T}_j$ *inclusa* in C_i i cui estremi B_h e B_q sono tali che $i_1 \in B_h^{-1}$ e $i_2 \in B_q^{-1}$. Pertanto, $\boldsymbol{C} \cup \{A\}$ è una catena chiusa di $\boldsymbol{T}_j$; ma allora, $\boldsymbol{C} \cup \{B\}$ è una catena chiusa di $\boldsymbol{T}^{\shortmid}$ e dunque necessariamente B_h^{-1} e B_q^{-1} intersecano B^{-1} rispettivamente in due punti j_1 e j_2.

Ora, $B^{-1} \cap C_i = \{j_1, j_2\}$. Infatti se $j_3 \in B^{-1} \cap C_i$ e $j_3 \neq j_1, j_2$ allora esisterebbe una catena $\boldsymbol{C}^{\shortmid}$ di $\boldsymbol{T}^{\shortmid}$ *inclusa* in C_i di estremi B_h e B_r con $r \neq h, q$ tale che $B^{-1} \cap B_r^{-1} = \{j_3\}$ e di conseguenza $\boldsymbol{C}^{\shortmid} \cup \{B\}$ sarebbe una catena chiusa di $\boldsymbol{T}^{\shortmid}$. Ma allora, $\boldsymbol{C}^{\shortmid} \cup \{A\}$ sarebbe una catena chiusa di $\boldsymbol{T}_j$ e di conseguenza i_2 dovrebbe appartenere a B_r^{-1} il che è assurdo in quanto si avrebbe che $\{B, B_r, B_h\}$ è una catena chiusa di $\boldsymbol{T}^{\shortmid}$ mentre $\{A, B_r, B_h\}$ non lo è di $\boldsymbol{T}_j$.

Se $i_1 \neq j_1$ allora gli insiemi $S = \cup\{B_r^{-1} \mid B_r^{-1} \subseteq C_i,\ \{i_1, j_1\} \cap B_r^{-1} \neq \emptyset$ $e\ r \neq h, q\} \backslash \{i_1, j_1\}$ e $\cup\{B_r^{-1} \mid B_r^{-1} \subseteq C_i\} \backslash (S \cup \{i_1, j_1\})$ sono inclusi in due blocchi disgiunti di $\mathcal{H} = \vee\{p_{\widehat{D}} \mid D \in \boldsymbol{T}_j\ e\ \{i_1, j_1\} \cap D \neq \emptyset\}$. Infatti, se così non fosse, esisterebbe almeno o una catena chiusa di $\boldsymbol{T}_j$ contenente un B_r, con $\{i_1\} \subseteq B_r^{-1} \subseteq C_i$, contenente A e non contenente B_q, o una di $\boldsymbol{T}^{\shortmid}$ contenente un B_r, con $\{j_1\} \subseteq B_r^{-1} \subseteq C_i$, contenente B e non contenente B_q. Ma allora, nel primo caso, ciò comporterebbe l'esistenza di una catena chiusa di $\boldsymbol{T}^{\shortmid}$ non contenente B_q e contenente B e B_r con $B_r^{-1} \cap B^{-1} \neq \emptyset$ e questo è assurdo in quanto da ciò seguirebbe che $\{B, B_r, B_q\}$ è una catena chiusa di $\boldsymbol{T}^{\shortmid}$ mentre $\{A, B_r, B_q\}$ non lo è di $\boldsymbol{T}_j$. Ad un'analoga contraddizione si giunge nel secondo caso.

Denotato, allora, con H il blocco di $\mathcal{H}$ contenente S, non è difficile verificare che lo scambio $\mathcal{S} = \mathcal{S}(i_1, j_1, H^{-1} \backslash \{i_1, j_1\})$ è un cambio-base per la tenda $\boldsymbol{T}_j$ ed inoltre che applicando prima tale scambio e poi lo scambio banale che trasforma i_1 in j_1 la tenda $\boldsymbol{T}_j$ è trasformata nella tenda $\boldsymbol{T}^{\shortparallel} = \{A_1^{\shortparallel}, \ldots, A_k^{\shortparallel}\}$ ove $(I \setminus A_{j+1}^{\shortparallel}) \cap C_i = (I \setminus B_{j+1}) \cap C_i$ e $A_i^{\shortparallel} = B_i$ per ogni $i = 1, \ldots, j$.

2. Se $A^{-1} \cap C_i = \{i_1\}$ ed esiste almeno una catena chiusa di $\boldsymbol{T}_j$ contenente A una cui sotto-catena è *inclusa* in C_i allora esiste una catena chiusa di $\boldsymbol{T}_j$ contenente A e un B_h tale che $B_h^{-1} \subseteq C_i$ e $B_h^{-1} \cap A^{-1} = \{i_1\}$. Pertanto, esiste una catena chiusa di $\boldsymbol{T}^{\shortmid}$ contenente B e B_h tale che $|B_h^{-1} \cap B^{-1}| = 1$. Posto $B_h^{-1} \cap B^{-1} = \{j_1\}$ con ragionamenti analoghi a quelli fatti nel caso precedente non è difficile verificare che $B^{-1} \cap C_i = \{j_1\}$ e che se $j_1 \neq i_1$ allora esiste un cambio base della tenda $\boldsymbol{T}_j$ che la trasforma nella tenda $\boldsymbol{T}^{\shortparallel} = \{A_1^{\shortparallel}, \ldots, A_k^{\shortparallel}\}$ ove $(I \setminus A_{j+1}^{\shortparallel}) \cap C_i = (I \setminus B_{j+1}) \cap C_i$ e $A_i^{\shortparallel} = B_i$ per ogni $i = 1, \ldots, j$.

3. Se $A^{-1} \cap C_i = \{i_1\}$ e non esistono catene chiuse contenenti A una cui sotto-catena è *inclusa* in C_i allora è evidente che $|B^{-1} \cap C_i| \leq 1$.

Se $B^{-1} \cap C_i \neq \emptyset$ allora posto $B^{-1} \cap C_i = \{j_1\}$, se $i_1 \neq j_1$ la non esistenza di catene chiuse contenenti A una cui sotto-catena è *inclusa* in C_i assicura che $A^{-1} \backslash \{i_1\}$ è incluso in un blocco H di $\mathcal{H} = \vee\{p_{\widehat{D}} \mid D \in \boldsymbol{T}_j\ e\ \{i_1, i_2\} \cap D \neq \emptyset\}$ tale che $H \cap C_i = \emptyset$. Pertanto, è semplice osservare che lo scambio $\mathcal{S} = \mathcal{S}(i_1, j_1, H^{-1} \backslash \{i_1, j_1\})$ è un cambio-base per la tenda $\boldsymbol{T}_j$ che viene trasformata attraverso di esso nella tenda $\boldsymbol{T}^{\shortparallel} = \{A_1^{\shortparallel}, \ldots, A_k^{\shortparallel}\}$ ove $(I \setminus A_{j+1}^{\shortparallel}) \cap C_i = (I \setminus B_{j+1}) \cap C_i$ e $A_i^{\shortparallel} = B_i$ per ogni $i = 1, \ldots, j$.

Quanto sinora osservato, ci consente di affermare che l'insieme $\{1, \ldots, p\}$ è unione disgiunta dei seguenti insiemi:

- $T_1 = \{i \in \{1, ..., p\} \mid |A_{j+1}^{-1} \cap C_i| = |B_{j+1}^{-1} \cap C_i|\}$,

- $T_2 = \{i \in \{1, ..., p\} \mid |A_{j+1}^{-1} \cap C_i| = 1\ e\ B_{j+1}^{-1} \cap C_i = \emptyset\}$,

- $T_3 = \{i \in \{1, ..., p\} \mid A_{j+1}^{-1} \cap C_i = \emptyset \ e \ |B_{j+1}^{-1} \cap C_i| = 1\}$;

e che componendo opportuni scambi è possibile ottenere un cambio-base $\mathcal{E}'$ della tenda $\boldsymbol{T}_j = \{B_1, \ldots, B_j, A_{j+1}, \ldots, A_k\}$ tale che $\mathcal{E}'(B_i) = B_i$ per ogni $i = 1, \ldots, j$, e $(\mathcal{E}'(A_{j+1}))^{-1} \cap C_i = B_{j+1}^{-1} \cap C_i$ per ogni $i \in T_1$.

Per i nostri scopi, allora, non lede la generalità, supporre che sia la tenda $\boldsymbol{T}_j$ a verificare tali proprietà. Il fatto che $|B_{j+1}| = |A_{j+1}|$ assicura che esiste una biezione f fra T_2 e T_3. Se $i \in T_2$ allora A_{j+1}^{-1} interseca C_i in un punto i_1 e B_{j+1}^{-1} interseca $C_{f(i)}$ in un puntoj_1. La non esistenza di catene chiuse di $\boldsymbol{T}_j$ una cui sotto-catena è *inclusa* in C_i assicura che, per ogni $q \notin C_i$, A_{j+1}^{-1} è incluso in un blocco H di $\mathcal{H} = \vee\{p_{\widehat{D}} \mid D \in \boldsymbol{T}_j \ e \ \{i_1, q\} \cap D \neq \emptyset\}$ che ha intersezione vuota con C_i. Pertanto, non è difficile verificare che componendo un numero finito di scambi opportuni si ottiene un cambio-base che trasforma la tenda $\boldsymbol{T}_j$ nella tenda $\boldsymbol{T}'' = \{B_1, \ldots, B_j, A''_{j+1}, \ldots, A''_k\}$ dove $(I \setminus A''_{j+1}) \cap C_q = (I \setminus B_{j+1}) \cap C_q$ per ogni $q \in T_1, (I \setminus A''_{j+1}) \cap C_i = \emptyset$ e $(I \setminus A''_{j+1}) \cap C_{f(i)} = I \setminus B_{j+1} \cap C_{f(i)}$.

Reiterando tale procedimento per ogni $i \in T_2$, si perviene alla fine ad un cambio-base $\mathcal{E}_{j+1}$ della tenda $\boldsymbol{T}_j$ che la trasforma nella tenda $\mathcal{E}_{j+1}(\boldsymbol{T}_j)$ tale che $\mathcal{E}_{j+1}(B_i) = B_i$ per ogni $i = 1, \ldots, j+1$. $\square$

Da tale risultato segue immediatamente che

Corollario 2.3.5 *Nelle ipotesi della proposizione precedente esiste un cambio-base fra le tende* $\boldsymbol{T}$ *e* $\boldsymbol{T}'$.

Seguendo le linee della dimostrazione precedente, con qualche complicazione formale, sfruttando l'ipotesi (3), si ottiene il risultato seguente:

Teorema 2.3.6 *Esiste un cambio-base* $\mathcal{E}$ *fra due tende* $\boldsymbol{T} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ *e* $\boldsymbol{T}' = \{B_1, \ldots, B_k\}$ *tale che* $\mathcal{E}(A_i) = B_i$ *per ogni* $i \in \{1, \ldots, k\}$, *se e solo se valgono le seguenti*:

(1) $|A_i| = |B_i|$ *per ogni* $i \in \{1, \ldots, k\}$;

(2) $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}\}$ *è una catena chiusa di* $\boldsymbol{T}$ *se e solo se* $\{B_{i_1}, \ldots, B_{i_r}\}$ *è una catena chiusa di* $\boldsymbol{T}'$;

(3) $|A_i^{-1} \cap A_j^{-1}| = s \geq 2$ *se e solo se* $|B_i^{-1} \cap B_j^{-1}| = s$.

E' semplice verificare che le (1), (2), (3) possono essere riformulate come segue:

(1) $\Leftrightarrow$ (1)' $|p_{A_i}| = |p_{B_i}|$ per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$;

(2) $\Leftrightarrow$ (2)' $|p_{A_i} \vee p_{A_j}| = |p_{B_i} \vee p_{B_j}|$ per ogni $i, j \in \{1, \ldots, k\}$;

(3) $\Leftrightarrow$ (3)' $|\vee\{p_{A_i} \mid i \in J\}| = |\vee\{p_{B_i} \mid i \in J\}|$ se $\{A_i \mid i \in J\}$ è una catena chiusa di $\boldsymbol{T}$.

Tenuto conto che è immediato verificare che l'esistenza di un cambio-base $\mathcal{E}$ fra due tende $\{A_1, \ldots, A_k\}$ e $\{B_1, \ldots, B_k\}$ tale che $\mathcal{E}(A_i) = B_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$ comporta che

$$|\vee\{p_{A_i} \mid i \in J\}| = |\vee\{p_{B_i} \mid i \in J\}|$$

si ritrova il seguente risultato:

Teorema 2.3.7 [17] *Esiste un cambio base $\mathcal{E}$ fra due tende $\boldsymbol{T} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ e $\boldsymbol{T}' = \{B_1, \ldots, B_k\}$ tale che $\mathcal{E}(A_i) = B_i$, per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$, se e solo se*

$$|\vee\{p_{A_i} \mid i \in J\}| = |\vee\{p_{B_i} \mid i \in J\}|$$

per ogni $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$.

e quanto provato chiarisce in che senso tali condizioni sono sovrabbondanti.

Siano V e V' due spazi vettoriali di dimensione $m-1$ su un campo K e siano B e B' rispettivamente due loro basi ridondanti. Un $\mathcal{R}$-*isomorfismo* fra una rappresentazione $(V'_1, \ldots, V'_k)$ di V' e una rappresentazione $(V_1, \ldots, V_k)$ di V è un isomorfismo $\varphi : V' \to V$ tale che $\varphi(V'_i) = V_i$ per ogni $i = 1, \ldots, k$. E' immediato osservare che se esiste un $\mathcal{R}$-*isomorfismo* fra due rappresentazioni allora

$$(\#)\ (dim(\cap\{V_i \mid i \in J\}) = dim(\cap\{V'_i \mid i \in J\}) \text{ per ogni } J \subseteq \{1, \ldots, k\}).$$

Tale condizione, in generale, non è però sufficiente a garantire l'esistenza di un $\mathcal{R}$-*isomorfismo*. Lo è se le rappresentazioni sono coordinate rispetto alle basi ridondanti.

Lemma 2.3.8 *$\mathcal{E}$ è un cambio base fra le tende $\boldsymbol{T} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ e $\boldsymbol{T}' = \{B_1, \ldots, B_k\}$ tale che $\mathcal{E}(A_i) = B_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$ se e solo se $\mathcal{E}^*$ è un $\mathcal{R}$-isomorfismo fra le rappresentazioni $(V'_{B_1}, \ldots, V'_{B_k})$ e $(V_{A_1}, \ldots, V_{A_k})$.*

Dim. Se $\mathcal{E}$ è un cambio-base fra $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{T}'$ tale che $B_i = \mathcal{E}(A_i)$ per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$, allora $\mathcal{E}^*(V'_{B_i}) = \langle \sum\limits_{h \in E_j} b_h \mid j \in \mathcal{E}(A_i)\rangle = \langle \sum\limits_{h \in E_j} b_h \mid b_{E_j} \geq p_{A_i}\rangle \leq V_{A_i}$ e pertanto $\mathcal{E}^*(V_{B_i}) = V_{A_i}$.

Viceversa, sia $\mathcal{E}^*$ un $\mathcal{R}$-*isomorfismo* fra le rappresentazioni $(V'_{B_1}, \ldots, V'_{B_k})$ e $(V_{A_1}, \ldots, V_{A_k})$. Ora $j \in B_i$ se e solo se $b'_j \in V'_{B_i}$ ossia se $\mathcal{E}^*(b'_j) = \sum\limits_{h \in E_j} b_h \in \mathcal{E}^*(V'_{B_i}) = V_{A_i}$ e dunque $b_{E_j} \in V_{A_i}$ ossia $j \in \mathcal{E}(A_i)$. Pertanto, $\mathcal{E}(A_i) = B_i$ e di conseguenza, avendo A_i e $\mathcal{E}(A_i)$ la stessa cardinalità, $\mathcal{E}$ è un cambio-base fra le tende $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{T}'$. $\square$

Valendo l'analogo del lemma 1.0.3, è semplice osservare che due rappresentazioni $(V'_{B_1}, \ldots, V'_{B_k})$ e $(V_{A_1}, \ldots, V_{A_k})$ verificano la condizione $(\#)$ se e solo se

$$|\vee\{p_{A_i} \mid i \in J\}| = |\vee\{p_{B_i} \mid i \in J\}|$$

per ogni $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$. Pertanto si ha:

Corollario 2.3.6 [5] *Se $(V'_{B_1}, \ldots, V'_{B_k})$ e $(V_{A_1}, \ldots, V_{A_k})$ sono due rappresentazioni di V' e V coordinate rispetto a due basi ridondanti B' e B allora esiste un $\mathcal{R}$-isomorfismo fra di esse se e solo se*

(#) $(dim(\cap\{V_i \mid i \in J\}) = dim(\cap\{V_i^{'} \mid i \in J\})$ *per ogni* $J \subseteq \{1, \ldots, k\})$.

2.4 $\mathcal{T}$-*morfismi*

Con $\mathbb{T}(\vee, \wedge)$ si denota il reticolo (distributivo) di tutti i tipi (classi d'isomorfismo di gruppi abeliani senza torsione di rango 1) a cui si aggiunge il simbolo ∞ per denotare il tipo del gruppo $\{0\}$.

Definizione 2.4.1 *Un'applicazione* $t : \mathbb{P}(m) \to \mathbb{T}$ *è un* $\mathcal{T}$-*morfismo se verifica le seguenti proprietà*:

(1) $t(\{I, \emptyset\}) = \infty$;

(2) t *è un* $\wedge$-*morfismo*;

(3) $t(b_E) = t(p_E \vee p_{I\setminus E}) = t(p_E) \vee (p_{I\setminus E})$ *per ogni* $E \subseteq I$.

Per ogni $i \in I$ e per ogni $E \subseteq I$, posto:

- $t_i = t(p_i)$,
- $\tau_E = \underset{i \in E}{\wedge} t_i$,
- $t_E = t_{I\setminus E} = \tau_E \vee \tau_{I\setminus E}$;

e ricordato che una m-upla $(t_1, \ldots, t_m)$ di elementi di un reticolo si dice *regolare* se $t_j \geq \underset{i \neq j}{\wedge} t_i$ per ogni $j \in I$, si ha:

Lemma 2.4.2 [12] *La* m-*upla* $(t_1, \ldots, t_m)$ *è regolare. Inoltre, per ogni* $E \subseteq I$ *e per ogni* $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\} \in \mathbb{P}(m)$, *si ha*:

(i) $t(p_E) = \tau_E$;

(ii) $t(b_E) = t_E$;

(iii) $t(\mathcal{C}) = t_{C_1} \wedge \cdots \wedge t_{C_k}$, *dove ogni* t_{C_i} *può essere omesso senza alterare il risultato*;

(iv) $t(\mathcal{C}) = \tau_{I\setminus C_1} \vee \cdots \vee \tau_{I\setminus C_k}$.

Dim. Le (i) e (ii) sono immediate. La (iii) segue dal lemma 1.0.1. Per la (iv) è sufficiente osservare che $t_{C_1} \wedge \cdots \wedge t_{C_k} = \tau_{I \setminus C_1} \vee \cdots \vee \tau_{I \setminus C_k}$.Dalla distributività di $\mathbb{T}$ segue che $t_{C_1} \wedge \cdots \wedge t_{C_k} = (\tau_{C_1} \vee \tau_{I \setminus C_1}) \wedge \cdots \wedge (\tau_{C_k} \vee \tau_{I \setminus C_k}) = \bigvee_{\varepsilon \in S} (\tau_{C_1^{\varepsilon(1)}} \wedge \cdots \wedge \tau_{C_k^{\varepsilon(k)}})$ ove $S = \{0,1\}^{\{1,\ldots,k\}}$; pertanto, essendo $\tau_{C_1} \wedge \cdots \wedge \tau_{C_k} = t_1 \wedge \cdots \wedge t_m$ e, $\tau_{I \setminus C_i} \vee \tau_{I \setminus C_j} = t_1 \wedge \cdots \wedge t_m$ e $\tau_{C_i} \geq \tau_{I \setminus C_j}$ per ogni coppia di indici i e j distinti, in definitiva si ottiene l'uguaglianza cercata. $\square$

Appare evidente che t è univocamente determinato dalla m-upla $(t_1, \ldots, t_m)$, tale m-upla si dice *base* di t. Dalla prossima proposizione segue che le m-uple regolari di tipi e i $\mathcal{T}$*-morfismi* sono in corrispondenza biunivoca.

Proposizione 2.4.3 [12] *Se* $(t_1, \ldots, t_m)$ *è una* m*-upla regolare di tipi allora l'applicazione*

$$t : \mathcal{A} \in \mathbb{P}(m) \to t(\mathcal{A}) = \begin{cases} t_{A_1} \wedge \cdots \wedge t_{A_k} & se\ \mathcal{A} \neq \{I, \emptyset\} \\ \infty & se\ \mathcal{A} = \{I, \emptyset\} \end{cases}$$

è un $\mathcal{T}$*-morfismo ed ha* $(t_1, \ldots, t_m)$ *come base.*

Dim. L'asserto è immediato osservato che $t(b_E) \wedge t(b_F) = t(b_E \wedge b_F)$. Per definizione: $t(b_E) \wedge t(b_F) = (\tau_E \vee \tau_{I \setminus E}) \wedge (\tau_F \vee \tau_{I \setminus F}) = (\tau_E \wedge \tau_F) \vee (\tau_E \wedge \tau_{I \setminus F}) \vee (\tau_{I \setminus E} \wedge \tau_F) \vee (\tau_{I \setminus E} \wedge \tau_F) = \tau_{(E^{-1} \cap F^{-1})^{-1}} \vee \tau_{(E \cap F^{-1})^{-1}} \vee \tau_{(E^{-1} \cap F)^{-1}} \vee \tau_{(E \cap F)^{-1}} = t(b_E \wedge b_F)$. $\square$

Le proprietà di t assicurano che $Im(t)$ è un $\wedge$*-semireticolo* finito di $\mathbb{T}$ dotato di massimo; di conseguenza, posto, per ogni $\alpha, \beta \in Im(t)$,

$$\alpha \veebar \beta = \wedge \{\sigma \in Im(t) \mid \sigma \geq \alpha, \beta\},$$

$Im(t)(\veebar, \wedge)$ è un reticolo finito. Il minimo di $Im(t)$ verrà denotato con τ.

Un $\mathcal{T}$*-morfismo* non è, in generale, un'applicazione iniettiva; la più piccola partizione per la quale un elemento $\sigma \in Im(t)$ si ottiene (partizione minima di σ rispetto a t) si denota con $part_t(\sigma)$. E' evidente che $t(part_t(\sigma)) = \sigma$ e $part_t(t(\mathcal{C})) \leq \mathcal{C}$; inoltre, si ha:

Proposizione 2.4.4 [14] *L'applicazione*

$$part_t : \sigma \in Im(t)(\veebar) \to part_t(\sigma) \in \mathbb{P}(m)(\vee)$$

è un $\vee$*-morfismo.*

Dim. Siano α, β due elementi di $Im(t)$ e siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ le rispettive partizioni minime. Se $\alpha \leq \beta$ allora $\alpha = t(\mathcal{A}) = t(\mathcal{A}) \wedge t(\mathcal{B}) = t(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, ma $\mathcal{A}$ è la partizione minima di α e pertanto $\mathcal{A} = \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ ossia $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$. Di conseguenza da $\alpha, \beta \leq \alpha \veebar \beta$ segue che $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \leq part_t(\alpha \veebar \beta)$.Viceversa, da $t(\mathcal{A}), t(\mathcal{B}) \leq t(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ segue $\alpha \veebar \beta \leq t(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ e quindi $part_t(\alpha \veebar \beta) \leq \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$. $\square$

Un elemento α di $Im(t)$ si dice $\vee$-irriducibile se non esistono $\beta, \sigma \in Im(t)$ tali che $\beta, \sigma < \alpha$ e $\alpha = \beta \vee \sigma$. E' semplice osservare che

Lemma 2.4.5 *Se α è un elemento $\vee$-irriducibile di $Im(t)$ allora $part_t(\alpha) = p_A$ ove $A = \{i \in I \mid t_i \geq \alpha\}$.*

Un sottoinsieme A di I, si dice un *primo* di t se è l'insieme sul quale è puntata la partizione minima di un elemento $\vee$-irriducibile di $Im(t)$. L'insieme dei primi di t si denota con $P(t)$. Essendo τ $\vee$-irriducibile, è evidente che $I \in P(t)$; inoltre, dalla regolarità della base di t segue che gli elementi di $P(t)$ sono regolari. Pertanto $P(t)$ è una m-tenda.

Lemma 2.4.6 *Se t è un $\mathcal{T}$-morfismo allora $\{\tau_A \mid A \in P(t)\}$ è l'insieme degli elementi $\vee$-irriducibili di $Im(t)$.*

Procedendo per induzione sulla lunghezza minima di una catena di $Im(t)$ contenente τ e un elemento di $Im(t)$, è semplice osservare che $\{\tau_A \mid A \in P(t)\}$ è il più piccolo insieme di $\vee$-generatori di $Im(t)$. Ne deriva che a partire da $P(t)$ è possibile calcolare tutte le partizioni minime degli elementi di $Im(t)$. Precisamente, dalla proposizione 2.4.4, segue:

Proposizione 2.4.7 [14] *Per ogni $\sigma \in Im(t)$,*

$$part_t(\sigma) = \vee\{p_A \mid A \in P(t) \text{ e } \tau_A \leq \sigma\}.$$

In particolare, allora, per ogni $i \in I$,

$$part_t(t_i) = \vee\{p_A \mid A \in P(t) \text{ e } \tau_A \leq t_i\} = \vee\{p_A \mid A \in P(t) \text{ e } i \in A\}$$

e di conseguenza si ha

Corollario 2.4.8 *La m-upla delle partizioni minime degli elementi della base di t coincide con la base di partizioni della tenda $P(t)$.*

Pertanto, la base di partizioni di una tenda $\boldsymbol{T}$ coincide con la m-upla

$$(part_t(t_1), \ldots, part_t(t_m))$$

dove t è un qualsiasi $\mathcal{T}$-*morfismo* che ha $\boldsymbol{T}$ come insieme dei primi (cfr. 2.4.10 per un esempio di $\mathcal{T}$-*morfismo* siffatto).

Si vedrà, ora, in che modo è possibile assegnata una tenda calcolare tutti i $\mathcal{T}$-*morfismi* che la hanno come insieme dei primi. Se $\boldsymbol{T}$ è una tenda e t è un $\mathcal{T}$-*morfismo* tale che $P(t) = \boldsymbol{T}$ allora l'applicazione

$$\varphi : A \in \boldsymbol{T} \to \varphi(A) = \tau_A \in \mathbb{T},$$

verifica le seguenti proprietà:

(1) $\varphi(A) > \vee\{\varphi(D) \mid A \subset D$ *e* $D \in \boldsymbol{T}\}$,

(2) $\varphi(A) \wedge \varphi(B) = \vee\{\varphi(D) \mid A \cup B \subseteq D$ *e* $D \in \boldsymbol{T}\}$;

inoltre, per ogni i $\in$ I, si ha:

$$t_i = \vee\{\varphi(D) \mid i \in D \text{ e } D \in \boldsymbol{T}\}.$$

Viceversa, vale la seguente:

Proposizione 2.4.9 [17] *Se* $\varphi : \boldsymbol{T} \to \mathbb{T}$ *è un'applicazione che verifica le proprietà* (1) *e* (2) *allora posto, per ogni* $i \in I$,

$$t_i = \vee\{\varphi(D) \mid i \in D \text{ e } D \in \boldsymbol{T}\},$$

la m*-upla* $(t_1, \ldots, t_m)$ *è regolare e* $P(t) = \boldsymbol{T}$ *ove* t *è il* $\mathcal{T}$*-morfismo di base* $(t_1, \ldots, t_m)$.

Dim. Si premette la seguente osservazione:

$$\text{se } J \subseteq I \text{ allora } \underset{i \in J}{\wedge} t_i = \vee\{\varphi(D) \mid J \subseteq D \text{ e } D \in \boldsymbol{T}\}.$$

E' sufficiente osservare che $t_i \wedge t_j = \vee\{\varphi(D) \mid i, j \in D$ *e* $D \in \boldsymbol{T}\}$ per ogni $i \neq j \in I$. Chiaramente $t_i \wedge t_j \geq \vee\{\varphi(D) \mid i, j \in D$ *e* $D \in \boldsymbol{T}\}$, la disuguaglianza opposta segue dal fatto che $t_i \wedge t_j = \vee\{\varphi(A) \wedge \varphi(B) \mid i \in A,\ j \in B$ *e* $A, B \in \boldsymbol{T}\}$ dove $\varphi(A) \wedge \varphi(B) = \vee\{\varphi(D) \mid A \cup B \subseteq D$ *e* $A, B \in \boldsymbol{T}\} \leq \vee\{\varphi(D) \mid i, j \in D$ *e* $D \in \boldsymbol{T}\}$.

Ora, è semplice verificare che, per ogni $j \in I$, $\underset{i \neq j}{\wedge} t_i = t_i = \vee\{\varphi(D) \mid D \in \boldsymbol{T}\}$ e dunque che la m-upla $(t_1, \ldots, t_m)$ è regolare. Inoltre, $\{\varphi(D) \mid D \in \boldsymbol{T}\}$ è l'insieme degli elementi $\vee$-irriducibili di $Im(t)$. Infatti, dall'osservazione iniziale segue che tale insieme è un insieme di $\vee$-generatori di $Im(t)$ e dalla (2) che ogni $\varphi(D)$ è $\vee$-irriducibile. Pertanto, essendo per ogni elemento $\vee$-irriducibile α di $Im(t)$, $part_t(\alpha) = p_D$ ove $D = \{i \in I \mid t_i \geq \alpha\}$, dalla definizione dei t_i segue che $P(t) = \boldsymbol{T}$. $\square$

Corollario 2.4.10 *Se* $\boldsymbol{T} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ *è una tenda allora posto, per ogni* $i \in I$,

$$t_i = (\delta^*_{A_1}(i), ..., \delta^*_{A_k}(i), 0, ..., 0),$$

dove, per ogni $j \in \{1, ..., k\}$, $\delta^*_{A_j}(i) = \infty$ *se* $i \in A_j$ *e* $\delta^*_{A_j}(i) = 0$ *se* $i \notin A_j$; *la* m*-upla* $(t_1, \ldots, t_m)$ *é regolare e* $P(t) = \boldsymbol{T}$ *ove* t *è il* $\mathcal{T}$*-morfismo di base* $(t_1, \ldots, t_m)$.

A questo punto, è naturale domandarsi in che relazione sono due $\mathcal{T}$*-morfismi* se hanno lo stesso insieme di primi. E' semplice verificare che vale la seguente:

Proposizione 2.4.11 [12] *Se t, u sono due $\mathcal{T}$-morfismi allora $P(t) = P(u)$ se e solo se esiste un isomorfismo di reticoli $f : Im(t) \to Im(u)$ tale che $f \cdot t = u$.*

Corollario 2.4.12 *Se t e u sono $\mathcal{T}$-morfismi con lo stesso insieme di primi allora $Im(t)$ e $Im(u)$ sono reticoli isomorfi.*

Dalla proposizione 2.4.11 segue che, come preannunciato, assegnare una tenda equivale ad assegnare una classe d'isomorfismo nella categoria nella quale gli oggetti sono i $\mathcal{T}$-*morfismi* e i morfismi fra due oggetti t e u sono i morfismi di reticoli fra $Im(t)$ e $Im(u)$ che rendono commutativi i triangoli formati.

Dal corollario 2.4.10 segue:

Corollario 2.4.13 *Studiando proprietà che dipendono dall'insieme dei primi di un $\mathcal{T}$-morfismo non lede la generalità limitarsi al caso di $\mathcal{T}$-morfismi i cui tipi della base siano costituiti da tutti 0 fatta eccezione che per un numero finito di ∞.*

E' utile tenere presente che, se t è un $\mathcal{T}$-*morfismo* siffatto allora la matrice che rappresenta $P(t)$ si può ottenere facilmente scrivendo i tipi come righe, sostituendo 1 ad ogni ∞, aggiungendo una colonna di formata da tutti 1, ed eliminando le colonne formate da tutti 0 e le ripetizioni di colonne.

Per le applicazioni future tornerà utile il seguente lemma:

Lemma 2.4.14 *Sia t il $\mathcal{T}$-morfismo di base $(t_1, \ldots, t_m)$. Se $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_s$ sono partizioni di I e $t^{\,'}$ è il $\mathcal{T}$-morfismo di base $(t(\mathcal{C}_1), \ldots, t(\mathcal{C}_s))$, allora $P(t^{\,'}) = \{P(A) \neq \emptyset \mid A \in P(t)\}$ ove $P(A) = \{j \in \{1, \ldots, s\} \mid \mathcal{C}_j(A) = 1\}$.*

Dim. Siano $\pi_1, \ldots, \pi_k$ gli elementi $\vee$-irriducibili di $Im(t)$. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ sono gli elementi $\vee$-irriducibili di $Im(t^{\,'})$ è semplice osservare che esistono q sottoinsiemi $S_1, \ldots, S_q$ a due a due disgiunti di I tali che $\alpha_i = \bigvee_{h \in S_i} \pi_h$ per ogni $i = 1, \ldots, q$. Se $p_{D_i} = part_{t'}(\alpha_i)$ allora $\alpha_i = \bigwedge_{h \in D_i} t(\mathcal{C}_h)$ e $\alpha_i \not\leq t(\mathcal{C}_h)$ per ogni $h \notin \mathcal{C}_i$, pertanto, $D_i = \{j \in \{1, \ldots, s\} \mid \mathcal{C}_j(A_r) = 1\}$ per ogni $r \in S_i$. Inoltre, se $i \notin S_1 \cup \cdots \cup S_q$ allora $\pi_i \not\leq t(\mathcal{C}_h)$ e di conseguenza $\mathcal{C}_h(A_i) = 0$ per ogni $h = 1, \ldots, q$. Ne deriva l'asserto. $\square$

Se la tenda $\{A_1, \ldots, A_k\}$ è l'insieme dei primi del $\mathcal{T}$-*morfismo* t di base $(t_1, \ldots, t_m)$ allora l'insieme dei primi del $\mathcal{T}$-*morfismo* di base $(t(\mathcal{C}_1), \ldots, t(\mathcal{C}_s))$ è rappresentato dalla matrice:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{C}_1(\mathrm{A}_1) & \mathcal{C}_1(\mathrm{A}_2) & . & . & . & \mathcal{C}_1(\mathrm{A}_i) & . & . & . & \mathcal{C}_1(\mathrm{A}_k) \\
\mathcal{C}_2(\mathrm{A}_1) & \mathcal{C}_2(\mathrm{A}_2) & . & . & . & \mathcal{C}_2(\mathrm{A}_i) & . & . & . & \mathcal{C}_2(\mathrm{A}_k) \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
\mathcal{C}_s(\mathrm{A}_1) & \mathcal{C}_s(\mathrm{A}_2) & . & . & . & \mathcal{C}_s(\mathrm{A}_i) & . & . & . & \mathcal{C}_s(\mathrm{A}_k)
\end{array}$$

(chiaramente, eliminando le colonne formate da tutti zeri e le ripetizioni di colonne).

Dal lemma 2.4.14 segue immediatamente che

Corollario 2.4.15 *Se $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \ldots, b_{E_m})$ è un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$ e $t^{\,\shortmid}$ è il $\mathcal{T}$-morfismo di base $(t_{E_1}, \ldots, t_{E_m})$ allora $P(t^{\,\shortmid}) = \{\mathcal{E}(A) \neq \emptyset \mid A \in P(t)\}$.*

Per ogni partizione $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ di I, si pone:

$$\mathcal{C}\,[A] = \{i \in \{1, \ldots, k\} \mid b_{C_i}(A) = 1\}$$

Corollario 2.4.16 [14] *Se $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\} \in \mathbb{P}(m)$ e $t^{\,\shortmid}$ è il $\mathcal{T}$-morfismo di base $(t_{C_1}, \ldots, t_{C_k})$ allora $P(t) = \{\mathcal{C}\,[A] \neq \emptyset \mid A \in P(t)\}$. Inoltre, $part_{t^{\shortmid}}(t_{C_i}) = (\mathcal{C} \vee part_t(t_{C_i}))^*$ (ove con $*$ s'intende che tale partizione è riguardata come partizione di $\mathcal{C}$).*

Dim. La prima parte segue immediatamente dalla proposizione 2.4.14. Ne deriva che $part_{t^{\shortmid}}(t_{C_i}) = \vee\{p_{\mathcal{C}[A]} \mid A \in P(t)$ *e* $b_{C_i}(A) = 1\} = \vee\{p_{\mathcal{C}[A]} \mid A \in P(t)$ *e* $p_A \leq b_{C_i}\} = \vee\{p_{\mathcal{C}[A]} \mid A \in P(t)$ *e* $\tau_A \leq t_{C_i}\} = (\mathcal{C} \vee part_t(t_{C_i}))^*$. $\square$

3 Contributi alla risoluzione di problemi aperti

Nei prossimi paragrafi verranno esaminati due problemi aperti. Essi riguardano le connessioni fra la natura reticolare e quella vettoriale dell'insieme delle partizioni di I.

Nel primo problema, si tratta di stabilire se una condizione reticolare relativa ad una m-upla di bipartizioni implica o meno l'ammissibilità di tale m-upla; nel secondo, se certe condizioni reticolari, che sono necessarie per l'indecomponibilità della tenda dominio di un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$, sono anche sufficienti.

I risultati parziali ottenuti, in entrambi i casi, mostrano come deve essere fatto un contro-esempio minimo e pertanto possono essere presi come il punto di partenza sia per pervenire ad una contraddizione sia per la costruzione di un contro-esempio.

Le notazioni adottate sono quelle del primo e del secondo capitolo.

3.1 Una condizione per l'ammissibilità

Sia $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \ldots, b_{E_m})$ un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$. E' stato osservato che se $\mathcal{F} = (b_{F_1}, \ldots, b_{F_m})$ è l'inverso di $\mathcal{E}$ allora

$$(b_{E_1}, \ldots, b_{E_m}) * (b_{F_1}, \ldots, b_{F_m}) \leq (p_1, \ldots, p_m).$$

Inoltre, non è difficile verificare che se per una m-upla $(b_{F_1}, \ldots, b_{F_m})$ di bipartizioni di I si ha

$$(b_{E_1}, \ldots, b_{E_m}) * (b_{F_1}, \ldots, b_{F_m}) = (p_1, \ldots, p_m)$$

allora $\mathcal{F} = (b_{F_1}, \ldots, b_{F_m})$ è l'inverso di $\mathcal{E}$.

Dunque, è naturale domandarsi se l'esistenza, per una m-upla $(b_{E_1}, \ldots, b_{E_m})$ di bipartizioni di I, di una m-upla $(b_{F_1}, \ldots, b_{F_m})$ tale che

$$(b_{E_1}, \ldots, b_{E_m}) * (b_{F_1}, \ldots, b_{F_m}) = (p_1, \ldots, p_m)$$

assicuri o meno che $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ sia un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$ e quindi che $\mathcal{F} = (b_{F_1}, \dots, b_{F_m})$ sia il suo inverso.

Il problema è ancora aperto. I prossimi risultati consentono di affermare che l'esistenza di una m-upla non ammissibile di bipartizioni di I con tale proprietà equivale all'esistenza di una k-upla $(b_{E'_1}, \dots, b_{E'_k})$ di bipartizioni di $\{1, \dots, n\}$, con $k < n \leq m$, tale che

(1)' $(b_{E'_1}, \dots, b_{E'_k})$ è linearmente indipendente,

(2)' ogni $b_{E'_i}$ non è una bipartizione puntata,

(3)' esiste una n-upla $(b_{F'_1}, \dots, b_{F'_n})$ di bipartizioni di $\{1, \dots, k\}$ tale che

$$(b_{E'_1}, \dots, b_{E'_k}) * (b_{F'_1}, \dots, b_{F'_n}) = (p_1, \dots, p_n).$$

Tale riduzione del problema sembra far propendere per una risposta affermativa ad esso. La nuova formulazione suggerisce la possibilità di un qualche procedimento induttivo che consenta di diminuire k, n o entrambi, in modo da pervenire a negare l'esistenza di $(b_{E'_1}, \dots, b_{E'_k})$ e $(b_{F1'}, \dots, b_{Fn'})$ che verifichino (1)', (2)', (3)'.

E' necessario premettere alcuni lemmi.

Lemma 3.1.1 *Sia $k \leq n$ e siano $(b_{E_1}, \dots, b_{E_k})$ e $(b_{F_1}, \dots, b_{F_n})$ rispettivamente una k-upla di bipartizioni di $\{1, \dots, n\}$ e una n-upla di bipartizioni di $\{1, \dots, k\}$ tali che*

$$(b_{E_1}, \dots, b_{E_k}) * (b_{F_1}, \dots, b_{F_n}) = (p_1, \dots, p_n).$$

Se esistono un $j \in \{1, \dots, k\}$ ed un $h \in \{1, \dots, n\}$ tali che $b_{E_j} = p_h$, posto:

$$b_{E'_i} = \{E_i - \{h\}, E_i^{-1} - \{h\}\} \text{ per ogni } i \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, k\}$$

e

$$b_{F'_i} = \{F_i - \{j\}, F_i^{-1} - \{j\}\} \text{ per ogni } i \in \{1, \dots, h-1, h+1, \dots, n\},$$

si ha

$$(b_{E'_1}, \dots, b_{E'_{j-1}}, b_{E'_{j+1}}, \dots, b_{E'_k}) * (b_{F'_1}, \dots, b_{F'_{h-1}}, b_{F'_{h+1}}, \dots, b_{F'_n}) = (p'_1, \dots, p'_n)$$

ove p'_i é la bipartizione puntata su i dell'insieme $\{1, \dots, h-1, h+1, \dots, n\}$.

Dim. Per semplificare le notazioni, sia $b_{E_k} = p_n$. Se $k \in F_i$, con $i \neq n$ allora $\mathcal{A}_i = \{\{i\}, \{n\}, A_2, \dots, A_s\}$ e $\mathcal{C}_i = \{\{i\}, \{n, q, \dots\}, B_2, \dots, B_r\}$, infatti, se $\{n\} \in \mathcal{C}_i$ si avrebbe che $\{n\} \in \mathcal{A}_i \vee \mathcal{C}_i = p_i$ il che è falso. Posto $b_{E'_i} = \{E_i \backslash \{n\}, E_i^{-1} \backslash \{n\}\}$, per ogni $i \in \{1, \dots, k-1\}$, e, $b_{F'_i} = \{F_i \backslash \{k\}, F_i^{-1} \backslash \{k\}\}$

per ogni $i \in \{1,\dots,n-1\}$, si ha $\mathcal{A}'_i = (\bigwedge_{j\in F'_i} b_{E'_j}) = \{\{i\}, A_2,\dots,A_s\}$ e $\mathcal{C}'_i = (\bigwedge_{j\in I\setminus F'_i} b_{E'_j}) = \{\{i\},\{q,\dots\},B_2,\dots,B_r\}$ per ogni $i \in \{1,\dots,n-1\}$. Dunque, dal fatto che $\mathcal{A}_i \vee \mathcal{C}_i = p_i$ segue che $\mathcal{A}'_i \vee \mathcal{C}'_i = p'_i$. $\square$

Lemma 3.1.2 *Sia $k \le n$. Se $(b_{E_1},\dots,b_{E_k})$ e $(b_{F_1},\dots,b_{F_n})$ sono rispettivamente una k-upla di bipartizioni di $\{1,\dots,n\}$ è una n-upla di bipartizioni di $\{1,\dots,k\}$ tali che*

$$(b_{E_1},\dots,b_{E_k}) * (b_{F_1},\dots,b_{F_n}) = (p_1,\dots,p_n),$$

allora valgono le seguenti proposizioni:

(i) $\bigwedge_{i\neq j} b_{E_i} = \{\{1\},\dots,\{n\}\}$ *per ogni* $j \in \{1,\dots,k\}$;

(ii) *se $J \subseteq \{1,\dots,k\}$ e $\{b_{E_i} \mid i \in J\}$ è una dipendenza lineare minimale di $(b_{E_1},\dots,b_{E_k})$ allora se $j \in I$,* o *$p_j \in \langle b_{E_i} \mid i \in J\rangle$, o esiste un $\varepsilon \in \{1,-1\}$ tale che $J \subseteq F_j^{\varepsilon}$.*

Dim. (i) Sia $j \in \{1,\dots,k\}$. Se F_i^{ε} è il blocco di b_{F_i} che non contiene j allora $p_i \in V(\mathcal{A}_i^{\varepsilon})$, dove $\mathrm{A}_i^{-1} = \mathcal{C}_i$. Ne deriva $\langle p_1,\dots,p_n\rangle \le V(\bigwedge_{i\neq j} b_{E_i})$.

(ii) Sia $j \in I$. Se l'insieme J non è incluso né in F_j né in F_j^{-1} allora, posto $J' = J \cap F_j$ e $J'' = J \cap F_j^{-1}$, si ha $\sum_{i\in J'} b_{E_i} \in V(\mathcal{A}_j)$ e $\sum_{i\in J''} b_{E_i} \in V(\mathcal{C}_j)$. Dal fatto che $\{b_{E_i} \mid i \in J\}$ è una dipendenza lineare minimale segue che $0 \neq \sum_{i\in J'} b_{E_i} = \sum_{i\in J''} b_{E_i} \in V(\mathcal{A}_j) \cap V(\mathcal{C}_j) = V(\mathcal{A}_j \vee \mathcal{C}_j) = \langle p_j\rangle$ e dunque $p_j \in \langle b_{E_i} \mid i \in J\rangle$. $\square$

Lemma 3.1.3 *Siano $(b_{A_1},\dots,b_{A_k})$ e $(b_{C_1},\dots,b_{C_q})$ due famiglie di bipartizioni dell'insieme $\{1,\dots,m\}$. Se $\langle b_{A_1},\dots,b_{A_k}\rangle = \langle b_{C_1},\dots,b_{C_q}\rangle$ allora $b_{A_1} \wedge \dots \wedge b_{A_k} = b_{C_1} \wedge \dots \wedge b_{C_q}$.*

Dim. Dal fatto che $b_{A_i} \in \langle b_{C_1},\dots,b_{C_q}\rangle \le V(b_{C_1} \wedge \dots \wedge b_{C_q})$ per ogni $i \in \{1,\dots,k\}$, segue che $b_{A_1} \wedge \dots \wedge b_{A_k} \ge b_{C_1} \wedge \dots \wedge b_{C_q}$. La disuguaglianza opposta è analoga. $\square$

Lemma 3.1.4 *Se $(b_{E_1},\dots,b_{E_m})$ e $(b_{F_1},\dots,b_{F_m})$ sono due m-uple di bipartizioni di I, tali che*

- $(b_{E_1},\dots,b_{E_m})$ *non è ammissibile,*
- $(b_{E_1},\dots,b_{E_m}) * (b_{F_1},\dots,b_{F_m}) = (p_1,\dots,p_m)$;

allora esiste una s-upla $(b_{E'_1},\dots,b_{E'_s})$ di bipartizioni linearmente indipendente di $\{1,\dots,n\}$, con $0 < s < n \le m$, tale che

(*) *esiste una n-upla $(b_{F'_1},\dots,b_{F'_n})$ di bipartizioni di $\{1,\dots,s\}$, tale che*

$$(b_{E'_1}, \dots, b_{E'_s}) * (b_{F'_1}, \dots, b_{F'_n}) = (p_1, \dots, p_n).$$

Dim. La m-upla $(b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ non è ammissibile, pertanto, contiene una dipendenza lineare minimale il cui numero di elementi k è strettamente minore di m. E' evidente che non lede la generalità supporre che si tratti delle ultime k bipartizioni. Posto $r = m - k$, si ha allora che $b_{E_{r+1}} + \cdots + b_{E_m} = 0$ e che nessuna sottosomma di tali bipartizioni è nulla.

Se $k = 1$ allora $b_{E_m} = \{\emptyset, I\}$ e pertanto, b_{E_m} non dà alcun contributo alla formazione delle $\mathcal{A}_i$ e delle $\mathcal{C}_i$.. Dunque, posto $b_{E'_i} = b_{E_i}$ per ogni $i \in \{1, \dots, m-1\}$ e $b_{F'_i} = \{F_i - \{m\}, F_i^{-1} - \{m\}\}$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$, si ha:

$$(b_{E'_1}, \dots, b_{E'_{m-1}}) * (b_{F'_1}, \dots, b_{F'_m}) = (p_1, \dots, p_m).$$

Sia $k \geq 2$.

Se nessuna bipartizione puntata appartiene al sottospazio $\langle b_{E_{r+1}}, \dots, b_{E_m} \rangle$ allora, per la (ii) del lemma 3.1.2, l'insieme $J = \{r+1, \dots, m\}$ è incluso o in F_j o in F_j^{-1} per ogni $j \in I$. Ora, dal fatto b_{E_m} dipende linearmente da $b_{E_{r+1}}, \dots, b_{E_{m-1}}$ segue che $b_{E_{r+1}} \wedge \cdots \wedge b_{E_m} = b_{E_{r+1}} \wedge \cdots \wedge b_{E_{m-1}}$ e pertanto essendo $\{r+1, \dots, m\}$ incluso o in F_j o in F_j^{-1}, b_{E_m} non dà nessun contributo alla formazione delle partizioni $\mathcal{A}_j$ e $\mathcal{C}_j$. Dunque, posto $b_{E'_i} = b_{E_i}$ per ogni $i \in \{1, \dots, m-1\}$ e $b_{F'_i} = \{F_i - \{m\}, F_i^{-1} - \{m\}\}$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$, si ha:

$$(b_{E'_1}, \dots, b_{E'_{m-1}}) * (b_{F'_1}, \dots, b_{F'_m}) = (p_1, \dots, p_m).$$

Se, invece, il sottospazio $\langle b_{E_{r+1}}, \dots, b_{E_m} \rangle$ contiene bipartizioni puntate, denotate con $p_{i_1}, \dots, p_{i_h}$ tali bipartizioni, è evidente che $b_{E_{r+1}} \wedge \cdots \wedge b_{E_m} = \{\{i_1\}, \dots, \{i_h\}, A_1, \dots, A_d\}$ e $1 \leq h < k$.

Posto $C_i = E_i \backslash \{i_1, \dots, i_h\}$ per ogni $i \in \{r+1, \dots, m\}$, è semplice osservare che $b_{C_{r+1}} \wedge \cdots \wedge b_{C_m} = \{\{i_1, \dots, i_h\}, A_1, \dots, A_d\}$ e che lo spazio vettoriale generato da $\{b_{C_{r+1}}, \dots, b_{C_m}\}$ ha dimensione $(k-h)-1$.

Sia $\{b_{C_{j_1}}, \dots, b_{C_{j_s}}\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente d'ordine $s = (k-h)-1$ di $\{b_{C_{r+1}}, \dots, b_{C_m}\}$. Per la (ii) del lemma 3.1.2, $b_{C_{j_1}} \wedge \cdots \wedge b_{C_{j_s}} = \{\{i_1, \dots, i_h\}, A_1, \dots, A_d\}$ e di conseguenza $p_{i_1} \wedge \cdots \wedge p_{i_h} \wedge b_{C_{j_1}} \wedge \cdots \wedge b_{C_{j_s}} = b_{Er+1} \wedge \cdots \wedge b_{Em}$. Posto:

- $b_{E'_t} = b_{E_t}$ per ogni $t \in \{1, \dots, r\}$,
- $b_{E'_{r+t}} = p_{i_t}$ per ogni $t \in \{1, \dots, h\}$,
- $b_{E'_{r+h+t}} = b_{C_{j_t}}$ per ogni $t \in \{1, \dots, s\}$,
- $b_{E'_m} = b_{\{i_1, \dots, i_t\}}$,
- $b_{F'_t} = b_{F_t}$ per ogni $t \notin \{i_1, \dots, i_h\}$,

- $b_{F'_{i_t}} = p_{r+t}$ per ogni $t \in \{1, \dots, h\}$;

si ha:

$$(b_{E'_1}, \dots, b_{E'_m}) * (b_{F'_1}, \dots, b_{F'_m}) = (p_1, \dots, p_m).$$

Infatti, se $t \in \{1, \dots, h\}$ allora $\mathcal{A}'_{i_t} = p_{i_t}$ e $\mathcal{C}'_{i_t} = \bigwedge_{j \neq i_t} b_{E'_j} \leq p_{i_t}$ poichè $p_{i_t} = \sum_{j \neq t} p_{i_j} + b_{E'_m}$, e dunque $\mathcal{A}'_{i_t} \vee \mathcal{C}'_{i_t} = p_{i_t}$. Se, invece, $i \notin \{i_1, \dots, i_h\}$ allora, per la (ii) del lemma 3.1.2, $\{r+1, \dots, m\}$ è incluso o in F_i o in F_i^{-1}. Per fissare le idee sia $\{r+1, \dots, m\} \subseteq F_i$. Si ha allora che, posto $H_i = F_i \backslash \{r+1, \dots, m\}$, $\mathcal{A}'_i = \bigwedge_{j \in F'_i} b_{E'_j} = \bigwedge_{j \in F_i} b_{E'_j} = (b_{E'_{r+1}} \wedge \dots \wedge b_{E'_m}) \wedge (\bigwedge_{j \in H_i} b_{E'_j}) = (p_{i_1} \wedge \dots \wedge p_{i_h} \wedge b_{C_{j_1}} \wedge \dots \wedge b_{C_{j_s}} \wedge b_{\{i_1, \dots, i_h\}}) \wedge (\bigwedge_{j \in H_i} b_{E_j}) = b_{E_{r+1}} \wedge \dots \wedge b_{E_m} \wedge (\bigwedge_{j \in H_i} b_{E_j}) = \bigwedge_{j \in F_i} b_{E_j} = \mathcal{A}_i$ e $\mathcal{C}'_i = \bigwedge_{j \in I \backslash F'_i} b_{E'_j} = \bigwedge_{j \in I \backslash F_i} b_{E_j} = \mathcal{C}_i$ e di conseguenza $\mathcal{A}'_i \vee \mathcal{C}'_i = p_i$.

Ora, essendo $b_{E'_{r+1}}, \dots, b_{E'_{r+h}}$ bipartizioni puntate, applicando alle m-uple $(b_{E'_1}, \dots, b_{E'_m})$ e $(b_{F'_1}, \dots, b_{F'_m})$ h volte il procedimento esposto nel lemma 3.1.1, posto $q = m - h$, si ottengono due q-uple di bipartizioni $(b_{E''_1}, \dots, b_{E''_q})$ e $(b_{F'''_1}, \dots, b_{F''_q})$ di $\{1, \dots, q\}$ tali che $(b_{E''_1}, \dots, b_{E''_q}) * (b_{F'''_1}, \dots, b_{F''_q}) = (p_1, \dots, p_q)$. Ma, $b_{Eq''} = 0$ e pertanto, si può agire su tale q-uple come nel primo caso esaminato.

In definitiva, si ottengono allora $q - 1$ bipartizioni di $\{1, \dots, q\}$ che verificano la proprietà (*). Se tali bipartizioni non sono linearmente indipendenti, si reitera il procedimento esposto fino a quando si ottiene una famiglia di bipartizioni linearmente indipendente che verifica la (*), infatti, ad ogni passo, si ottiene sempre una nuova famiglia di bipartizioni con la proprietà (*) alla quale è riapplicabile il procedimento esposto. □

Quanto provato consente, allora, di affermare quanto segue

Proposizione 3.1.5 *Esistono due m-uple $(b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ e $(b_{F_1}, \dots, b_{F_m})$ di bipartizioni di I, tali che*

(1) $(b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ *non è ammissibile,*

(2) $(b_{E_1}, \dots, b_{E_m}) * (b_{F_1}, \dots, b_{F_m}) = (p_1, \dots, p_m)$;

se e solo se esiste una k-upla di bipartizioni e $(b_{E'_1}, \dots, b_{E'_k})$ di $\{1, \dots, n\}$, con $k < n \leq m$, e una n-upla di bipartizioni $(b_{F'_1}, \dots, b_{F'_n})$ di $\{1, \dots, k\}$, tali che

(1)' $(b_{E'_1}, \dots, b_{E'_k}) * (b_{F'_1}, \dots, b_{F'_n}) = (p_1, \dots, p_m)$,

(2)' $(b_{E'_1}, \dots, b_{E'_k})$ *è linearmente indipendente,*

(3)' *nessuna $b_{E'_i}$ è una bipartizione puntata.*

Dim. Applicando il procedimento esposto nel lemma 3.1.5 si ottengono a partire da $(b_{E_1}, \ldots, b_{E_m})$ e $(b_{F_1}, \ldots, b_{F_m})$ una k-upla $(b_{E'_1}, \ldots, b_{E'_k})$ di bipartizioni di $\{1, \ldots, n\}$ e una n-upla $(b_{F1'}, \ldots, b_{Fn'})$ di bipartizioni di $\{1, \ldots, k\}$, con $k < n \leq m$, tali che $(b_{E'_1}, \ldots, b_{E'_k}) * (b_{F'_1}, \ldots, b_{F'_n}) = (p_1, \ldots, p_m)$ e $(b_{E'_1}, \ldots, b_{E'_k})$ è linearmente indipendente.

Se una delle $b_{E'_i}$ è una bipartizione puntata applicando il procedimento esposto nel lemma 3.1.1 e rinominando opportunamente gli indici si ottengono $k-1$ bipartizioni di $\{1, \ldots, n-1\}$ e $n-1$ di $\{1, \ldots, k-1\}$ verificanti le proprietà $(1)'$ e $(2)'$. Se una delle nuove bipartizioni è puntata, allora si riapplica il procedimento. Reiterando tale procedimento, ad un certo punto, s'individua una famiglia che non contiene bipartizioni puntate che verifica le proprietà $(1)'$ e $(2)'$.

L'implicazione inversa è immediata, infatti, è sufficiente porre $b_{E_i} = 0$ per ogni $i = k+1, \ldots, n$ e modificare le b_{F_i} in modo opportuno. □

3.2 Una condizione per l'indecomponibilità

Sia $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \ldots, b_{E_m})$ un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$ e $\mathcal{F} = (b_{F_1}, \ldots, b_{F_m})$ il suo inverso. Dal corollario 1.1.4 segue immediatamente la seguente:

Proposizione 3.2.1 [14] *Se $\mathcal{E}$ è indecomponibile allora $\mathcal{E} * \mathcal{F} = (p_1, \ldots, p_m)$.*

L'indecomponibilità non è però necessaria, come mostra il prossimo esempio.

Esempio 3.2.2
Sia $\mathcal{E} = (b_{\{1,2,3,9\}}, b_{\{2,3,9\}}, b_{\{1,7,8\}}, b_{\{3,4\}}, b_{\{5,6,9\}}, b_{\{1,2,8,9\}}, b_{\{6,7\}}, b_{\{6,7,8\}}, p_9)$; si ha:

- $\mathcal{E} * \mathcal{F} = (p_1, \ldots, p_9)$,
- $part_t(t_2) = \{\{2\}, \{9\}, \{1,3,4,5,6,7,8\}\}$.

$(\mathcal{F} = ((b_{\{1,2\}}, b_{\{3,4,5\}}, b_{\{1,6,7,8\}}, b_{\{2,3,5,9\}}, b_{\{4,6,7\}}, b_{\{1,2,3,8\}}, b_{\{4,5,6,9\}}, b_{\{7,8\}}, p_9))$.

Per un altro esempio cfr. (sec.9 [15]). In entrambi gli esempi, accade però che $\mathcal{F} * \mathcal{E} < (p_1, \ldots, p_m)$, pertanto, il verificarsi di entrambe le condizioni potrebbe avere ancora come conseguenza l'indecomponibilità di $\mathcal{E}$.

Le prossime proposizioni mostrano come sono fatti gli elementi del dominio di un automorfismo $\mathcal{E}$ di $\mathbb{B}(m)$ minimale sotto le ipotesi:

(i) $\mathcal{E} * \mathcal{F} = (\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{A}_m \vee \mathcal{C}_m) = (p_1, \ldots, p_m)$,

(ii) $\mathcal{F} * \mathcal{E} = (\mathcal{A}'_1 \vee \mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{A}'_m \vee \mathcal{C}'_m) = (p_1, \ldots, p_m)$,

(iii) $\mathcal{E}$ è decomponibile.

Lemma 3.2.3 *Sia $\mathcal{E}$ un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$. Se $A \in D(\mathcal{E})$ e $k \in A$ allora k appartiene ad un blocco di $\mathcal{A}_i$ o di $\mathcal{C}_i$ costituito solo da elementi di A, per ogni $i \in I$.*

Dim. Dal fatto che $V_A = \langle b_{E_j} \mid j \in \mathcal{E}(A) \rangle$ segue immediatamente che esiste almeno un $j \in I$ tale che $k \in E_i^{\varepsilon} \subseteq A$ con $\varepsilon \in \{1, -1\}$. $\square$

Proposizione 3.2.4 *Sia $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \ldots, b_{E_m})$ un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$ e $\mathcal{F} = (b_{F_1}, \ldots, b_{F_m})$ il suo inverso. Se $A \in D(\mathcal{E})$ allora non lede la generalità supporre che $\mathcal{E}(A) = A$. Posto:*

- $E_i^* = E_i - A$ *e* $E_i^{*-1} = E_i^{-1} - A$,
- $F_i^* = F_i - A$ *e* $F_i^{*-1} = F_i^{-1} - A$,
- $\mathcal{E}^* = (b_{E_i^*} \mid i \in I - A)$,
- $\mathcal{F}^* = (b_{F_i^*} \mid i \in I - A)$,
- $\mathcal{A}_j^* = (\bigwedge_{i \in F_j^*} b_{E_i^*})$ *e* $\mathcal{C}_j^* = (\bigwedge_{i \in I \setminus F_j^*} b_{E_i^*})$ *per ogni* $j \in I - A$,
- $\mathcal{A}_j^{*\prime} = (\bigwedge_{i \in E_j^*} b_{F_i^*})$ *e* $\mathcal{C}_j^{*\prime} = (\bigwedge_{i \in I \setminus E_j^*} b_{F_i^*})$ *per ogni* $j \in I - A$;

valgono le seguenti affermazioni:

(i) $\mathcal{E}^* = (b_{E_i^*} \mid i \in I - A)$ *è una famiglia ammissibile di bipartizioni di* $I - A$,

(ii) $\mathcal{F}^* = (b_{F_i^*} \mid i \in I - A)$ *è l'inverso di* $\mathcal{E}^*$,

(iii) *se* $j \in I - A$ *e* $\mathcal{A}_j \vee \mathcal{C}_j = p_j$ *allora* $\mathcal{A}_j^* \vee \mathcal{C}_j^* = p_j$,

(iv) *se* $j \in I - A$ *e* $\mathcal{A}'_j \vee \mathcal{C}'_j = p_j$ *allora* $\mathcal{A}_j^{*\prime} \vee \mathcal{C}_j^{*\prime} = p_j$,

(v) $D(\mathcal{E}^*) = \{B \cap A^{-1} \mid B \in D(\mathcal{E})$ *e* $A \subseteq B\}$.

Dim. Per semplificare le notazioni, senza ledere la generalità, supponiamo:

- $A = \mathcal{E}(A) = \{s+1, \ldots, m\}$,
- $E_i \subseteq \{s+1, \ldots, m\}$ e $F_i \subseteq \{s+1, \ldots, m\}$ per ogni $i \in \{s+1, \ldots, m\}$.

(i) Da $b_{E_{s+1}} + \cdots + b_{E_m} = b_{A'}$ (con $A' \subseteq A$) segue che $b_{E_1^*} + \cdots + b_{E_s^*} = 0$. Inoltre, se per assurdo esiste un $H \subset \{1,\ldots,s\}$ tale che $\sum_{i\in H} b_{E_i^*} = 0$ allora $\sum_{i\in H} b_{E_i} = b_D$ con $D \subseteq \{s+1,\ldots,m\}$. Dal fatto che $b_D \in \langle b_{E_i} \mid i \in \mathcal{E}(A)\rangle$ segue allora che esiste un $S' \subset \{s+1,\ldots,m\}$ tale che $\sum_{i\in H\cup S'} b_{E_i} = 0$ il che è assurdo per l'ammissibilità di $\mathcal{E}$.

(ii) Sia $j \in \{1,\ldots,s\}$. Se $\sum_{i\in F_j^*} b_{E_i^*} = b_C$ ($C \subseteq \{1,\ldots,s\}$) allora $\sum_{i\in F_j^*} b_{E_i} = b_{C\cup A'}$, con $A' \subseteq \{s+1,\ldots,m\}$ e di conseguenza $p_j = \sum_{i\in F_j\setminus A} b_{E_i} + \sum_{i\in F_j\cap A} b_{E_i} = b_{C\cup A'} + b_{A''}$ con $A'' \subseteq \{s+1,\ldots,m\}$. Ma, allora, l'unica possibilità è che o $C = \{j\}$ o $C = \{1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,s\}$.

(iii) Sia $j \in \{1,\ldots,s\}$ e $b_C \in \mathcal{A}_j^* \vee \mathcal{C}_j^*$ con $\emptyset \neq C \subseteq \{1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,s\}$. Siano D_1 e D_2 rispettivamente l'unione dei blocchi di $\mathcal{A}_j$ e $\mathcal{C}_j$ che contengono gli elementi di C. Per come sono stati definiti i $b_{E_i^*}$, si ha $D_1 = C \cup A_1$ e $D_2 = C \cup A_2$ dove A_1 e A_2 sono due sottoinsiemi disgiunti di $\{s+1,\ldots,m\}$. Infatti, se, per assurdo, $k \in A_1 \cap A_2$ si avrebbe che k è un elemento di A che appartiene ad un blocco di $\mathcal{A}_j$ e ad un blocco di $\mathcal{C}_j$ contenenti entrambi elementi di C e questo non é possibile per il lemma 3.2.3.

Ora, $b_{C\cup A_1} \in V(\mathcal{A}_j)$ e $b_{C\cup A_2} \in V(\mathcal{C}_j)$. Proviamo, a partire da ciò, che esiste un $D \subseteq A$ tale che $b_{C\cup D} \in V(\mathcal{A}_j) \cap V(\mathcal{C}_j)$. Se $A_1 = A_2 = \emptyset$ allora $D = \emptyset$. Se A_1 e A_2 non sono entrambi vuoti allora non lede la generalità supporre che A_1 sia non vuoto. Sia $h \in A_1$. Dal fatto che $A_1 \subseteq A \in D(\mathcal{E})$ segue che $F_h \subseteq A$. E' evidente che F_h non è incluso in F_j. Infatti, se così fosse, si avrebbe che $\{h\} \in \mathcal{A}_j$ contro l'ipotesi che $A_1 \cup C$ sia l'unione dei blocchi di $\mathcal{A}_j$ contenente gli elementi di C. Si hanno allora due eventualità:

- $F_h \subseteq F_j^{-1}$,
- $S' = F_j \cap F_h \neq \emptyset$ e $S'' = F_j^{-1} \cap F_h \neq \emptyset$.

Se $F_h \subseteq F_j^{-1}$ allora $p_h \in V(\mathcal{C}_j)$ e di conseguenza:

$$b_C + b_{A_1} \in V(\mathcal{A}_j) \ \text{ e } \ b_C + b_{A_2} + p_h \in V(\mathcal{C}_j).$$

Se, invece, $S' \neq \emptyset$ e $S'' \neq \emptyset$ allora $\{b_{A'}, b_{A'\cup\{h\}}\} = \{\sum_{i\in S'} b_{E_i}, \sum_{i\in S''} b_{E_i}\}$ dove $h \notin A' \subseteq A$ e, in particolare, appartenendo h ad un blocco di $\mathcal{A}_j$ contenente elementi di C deve aversi $b_{A'} = \sum_{i\in S'} b_{E_i} \in V(\mathcal{A}_j)$ e $b_{A'\cup\{h\}} = \sum_{i\in S''} b_{E_i} \in V(\mathcal{C}_j)$.Pertanto, si ha:

$$b_C + b_{A_1} + b_{A'} \in V(\mathcal{A}_j) \ \text{ e } \ b_C + b_{A_2} + p_h + b_{A'} \in V(\mathcal{C}_j).$$

Dunque, tenuto conto dei due casi possibili, si ha che esiste un sottoinsieme A' di A (eventualmente vuoto) tale che $b_C + b_{A_1} + b_{A'} \in V(\mathcal{A}_j)$ e $b_C + b_{A_2} + p_h + b_{A'} \in V(\mathcal{C}_j)$. Reiterando tale procedimento, per ogni $h \in A_1$, si ottiene allora che

$$b_C + b_{A_1} + b_{A''} \in V(\mathcal{A}_j) \text{ e } b_C + b_{A_2} + b_{A_1} + b_{A''} \in V(\mathcal{C}_j)$$

dove $A'' \subseteq A$. Ora, se $A_2 = \emptyset$ si ha:

$$b_C + b_{A_1} + b_{A''} \in V(\mathcal{A}_j) \quad \text{e} \quad b_C + b_{A_1} + b_{A''} \in V(\mathcal{C}_j).$$

Altrimenti, operando in modo del tutto analogo per ogni h $\in$ A_2 si ottiene che

$$b_C + b_{A_2} + b_{A_1} + b_{A'''} \in V(\mathcal{A}_j) \text{ e } b_C + b_{A_2} + b_{A_1} + b_{A'''} \in V(\mathcal{C}_j)$$

dove $A''' \subseteq A$. Quindi, in definitiva, si ottiene che esiste un sottoinsieme D di A tale che

$$b_C + b_D \in V(\mathcal{A}_j) \cap V(\mathcal{C}_j) = p_j$$

Ma, allora, $C = \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, s\}$ e di conseguenza $\mathcal{A}_j^* \vee \mathcal{C}_j^* = p_j$.
(iv) Si verifica in maniera del tutto analogo a quanto fatto per la (iii).
(v) E' immediata. $\square$

Da tale proposizione segue immediatamente che

Proposizione 3.2.5 *Sia $\mathcal{E}$ è un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$ tale che denotato con $\mathcal{F}$ l'inverso di $\mathcal{E}$ si ha:*

- $\mathcal{E} * \mathcal{F} = (p_1, \ldots, p_m)$,
- $\mathcal{F} * \mathcal{E} = (p_1, \ldots, p_m)$.

Se $A \in D(\mathcal{E})$ allora, posto $A^{-1} = \{i_1, \ldots, i_s\}$, "cancellando" A si ottiene una s-upla di bipartizioni ammissibile $\mathcal{E}'$ di A^{-1} tale che, denotato con $\mathcal{F}'$ l'inverso di $\mathcal{E}'$, si ha:

- $\mathcal{E}' * \mathcal{F}' = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_s})$,
- $\mathcal{F}' * \mathcal{E}' = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_s})$,
- $D(\mathcal{E}') = \{B \cap \{i_1, \ldots, i_s\} \mid B \in D(\mathcal{E}) \text{ e } A \subseteq B\}$.

S'introduce ora la seguente:

Definizione 3.2.6 *Un elemento A di una tenda $\boldsymbol{T}$ si dice generato da una catena chiusa se $A = A_1 \cap \cdots \cap A_q$ dove $\{A_1, \ldots, A_q\}$ è una catena chiusa di $\boldsymbol{T}$.*

E' necessario fissare l'attenzione sugli elementi della tenda $D(\mathcal{E}) \backslash \{\emptyset\}$ generati da particolari catene chiuse. Per induzione, si dà la definizione di catena chiusa di livello n.

Definizione 3.2.7 *Sia $\boldsymbol{C} = \{A_1, \ldots, A_q\}$ una catena chiusa di $D(\mathcal{E}) \backslash \{\emptyset\}$, ossia, senza ledere la generalità:*

- $X_q = A_1^{-1} \cap A_q^{-1} \neq \emptyset$ *e* $X_j = A_j^{-1} \cap A_{j+1}^{-1} \neq \emptyset$ *per ogni* $j = 1, \ldots, q-1$,

- $A_i^{-1} \cap A_j^{-1} = \emptyset$ *nei restanti casi.*

Si dice che $\boldsymbol{C}$ *è una catena chiusa di livello* 0 *se* $q = 1$ *e* $|A_1| = m - 2$.
Se $n > 0$, *si dice che* $\boldsymbol{C}$ *è una catena chiusa di livello* n *se*

- $|X_j| = 1$ *per ogni* $j = 1, \ldots, q$;

- *ogni* A_j *è generato da una catena chiusa*;

- n *è strettamente maggiore dei livelli delle catene chiuse che generano ogni* A_i;

- *esiste almeno un* A_i *che è generato da una catena chiusa di livello* $n - 1$.

Dunque, le catene chiuse di livello 0 sono tutti e soli gli elementi di $D(\mathcal{E})$ che hanno ordine $m-2$. Chiaramente,$\boldsymbol{C}$ è una catena chiusa di livello 1 se e solo se $A_1^{-1} = \{i_1, i_2\}, A_2^{-1} = \{i_2, i_3\}, \ldots, A_q^{-1} = \{i_1, i_q\}$. Si osservi che se un elemento A di $D(\mathcal{E})$ è generato da una catena chiusa di un certo livello allora in generale non è vero che tale catena è univocamente determinata.

Esempio 3.2.8
Sia $\mathcal{E} = (b_{\{1,2,3,9\}}, b_{\{2,3,9\}}, b_{\{1,3,9\}}, b_{\{1,5,6\}}, b_{\{2,4,7\}}, b_{\{6,7,8,9\}}, b_{\{7,8\}}, b_{\{6,8\}}, p_9)$.
Posto $A = \{1,2,3,9\}$ e $B = \{6,7,8,9\}$, è semplice verificare che $D(\mathcal{E}) = \{\emptyset, I, \{9\}, A, B, \{3,9\}^{-1}, \{1,3\}^{-1}, \{1,5\}^{-1}, \{5,6\}^{-1}, \{6,8\}^{-1}, \{7,8\}^{-1}, \{4,7\}^{-1}, \{4,5\}^{-1}, \{2,4\}^{-1}, \{2,3\}^{-1}\}$; pertanto, A è generato dalle catena chiusa

- $\boldsymbol{C}_1 = \{\{4,7\}^{-1}, \{7,8\}^{-1}, \{6,8\}^{-1}, \{5,6\}^{-1}, \{4,5\}^{-1}\}$,

e B è generato dalla catena chiusa:

- $\boldsymbol{C}_2 = \{\{4,5\}^{-1}, \{1,5\}^{-1}, \{1,3\}^{-1}, \{2,3\}^{-1}, \{2,4\}^{-1}\}$.

$\boldsymbol{C}_1$ e $\boldsymbol{C}_2$ sono catene chiuse di livello 1, pertanto, le catene chiuse:

- $\boldsymbol{C}_3 = \{A, \{4,7\}^{-1}, \{7,8\}^{-1}, \{6,8\}^{-1}, \{5,6\}^{-1}\}$,

- $\boldsymbol{C}_4 = \{B, \{1,5\}^{-1}, \{1,3\}^{-1}, \{2,3\}^{-1}, \{2,4\}^{-1}\}$,

hanno livello 2. E' evidente che $\{9\}$ è generato sia da $\boldsymbol{C}_3$ che da $\boldsymbol{C}_4$, inoltre $\{9\}$ è generato anche dalla catena chiusa

$\boldsymbol{C}_5 = \{\{1,3\}^{-1}, \{1,5\}^{-1}, \{5,6\}^{-1}, \{6,8\}^{-1}, \{7,8\}^{-1}, \{4,7\}^{-1}, \{2,4\}^{-1}, \{2,3\}^{-1}\}$

che ha livello 1. $\square$

Proposizione 3.2.9 *Sia* $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \ldots, b_{E_m})$ *un automorfismo di* $\mathbb{B}(m)$ *e sia* $\mathcal{F}$ *il suo inverso. Se* $\mathcal{E}$ *è minimale sotto le ipotesi*:

(i) $\mathcal{E}$ *è decomponibile*,

(ii) $(\mathcal{E} * \mathcal{F}) = (p_1, \dots, p_m)$,

(iii) $(\mathcal{F} * \mathcal{E}) = (p_1, \dots, p_m)$,

allora ogni $A \in D(\mathcal{E})$ *è generato da una catena chiusa* (*di un certo livello*).

Dim. Sia $A \in D(\mathcal{E})$. Si procede per induzione sull'ordine di A^{-1}. Se $|A^{-1}| = 2$ allora per definizione A è generato da una catena chiusa di livello 0.

Sia $|A^{-1}| = n > 2$ e l'asserto vero per ogni elemento di $D(\mathcal{E})$ che ha ordine strettamente maggiore di $m - n$. Dunque, in particolare, l'asserto è vero per ogni $B \in D(\mathcal{E})$ tale che $A \subset B$.

Dalla proposizione 3.2.5 e dalla minimalità di $\mathcal{E}$ segue che la n-upla $\mathcal{E}^{|}$ deve essere indecomponibile, e di conseguenza per ogni $i \in A^{-1}$ deve aversi

$$\vee\{p_B \mid B \in D(\mathcal{E}), A \subset B \text{ } e \text{ } i \in B\} = p_{\{i\} \cup A}.$$

Sia $j \in A^{-1}$. Tenuto conto che per il lemma 2.2.3 se $B_1, B_2 \in D(\mathcal{E})$ e $|B_1^{-1} \cap B_2^{-1}| \geq 2$ allora $B_1 \cap B_2 \in D(\mathcal{E})$, dal fatto che $p_{\{j\} \cup A} = \vee\{p_B \mid B \in D(\mathcal{E}), A \subset B \text{ } e \text{ } j \in B\}$ segue che esistono s elementi $A_1, A_2, \dots, A_s$ del dominio di $\mathcal{E}$, tali che:

- $|A_i^{-1} \cap A_{i+1}^{-1}| = 1$ per ogni $i \in \{1, \dots, s-1\}$;
- $A_i^{-1} \cap A_h^{-1} = \emptyset$ per ogni $i, h \in \{1, \dots, s\}$ tali che $h \neq i+1, i-1$;
- $A \subset A_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, s\}$;

inoltre, per l'ipotesi induttiva

- A_i è generato da una catena chiusa di $D(\mathcal{E})$ per ogni $i \in \{1, \dots, s\}$.

Ora, il fatto che $\vee\{p_B \mid B \in D(\mathcal{E}), A \subset B \text{ } e \text{ } i \in B\} = p_{\{i\} \cup A}$ per ogni $i \in A^{-1} \backslash \{j\}$ assicura che esistono $D, H \in D(\mathcal{E})$ tali che $A \subset D, H$; $j \notin D, H$; e $D^{-1} \cap A_1^{-1} \neq \emptyset$ e $H^{-1} \cap A_s^{-1} \neq \emptyset$. Inoltre, essendo per l'ipotesi induttiva D e H generati da catene chiuse di un certo livello necessariamente deve aversi che esistono un $i_1 \in A_1^{-1}$ e un $i_s \in A_s^{-1}$ tali che $\{j, i_1\}^{-1}, \{j, i_s\}^{-1} \in D(\mathcal{E})$. Pertanto, denotato con n_i il massimo livello di una catena chiusa che genera A_i e con r il massimo di $\{n_i \mid i \in \{1, \dots, s\}\}$ e posto $A_{s+1} = \{j, i_1\}^{-1}$ e $A_{s+2} = \{j, i_s\}^{-1}$, è immediato osservare che $\{A_1, \dots, A_{s+2}\}$ è una catena chiusa di $D(\mathcal{E})$ di livello $r+1$ che genera A. $\square$

3.3 Un terzo problema aperto

Si termina questo capitolo con la menzione di un ulteriore problema aperto per il quale al momento si è in grado solo di fornire un esempio.

Se $\mathcal{E}$ è un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$ allora $\{\emptyset, I\} \subseteq D(\mathcal{E})$. L'esempio che segue mostra che esistono automorfismi di $\mathbb{B}(m)$ per i quali vale l'uguaglianza, ossia automorfismi di $\mathbb{B}(m)$ con dominio banale. Sorge così in maniera naturale il problema di una loro caratterizzazione.

Esempio 3.3.1. Sia $\mathcal{E}$ il seguente automorfismo di $\mathbb{B}(8)$:

- $\mathcal{E} = (b_{\{1,2,3,8\}}, b_{\{1,5,6\}}, b_{\{1,2,7,8\}}, b_{\{2,4,6\}}, b_{\{2,3,6,7\}}, b_{\{1,2,4,7\}}, b_{\{6,7,8\}}, b_{\{2,5,8\}})$;

il suo inverso è

- $\mathcal{E}^{-1} = (b_{\{1,5,7\}}, b_{\{1,2,6\}}, b_{\{2,4,7\}}, b_{\{1,3,4,5\}}, b_{\{1,3,6,7\}}, b_{\{2,3,5,6\}}, b_{\{5,6,8\}}, b_{\{1,4,5,6\}})$.

Si ha:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \{\{1\},\{2,3\},\{4,5\},\{6,7\},\{8\}\} \\
\mathcal{C}_1 &= min.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 &= \{\{2\},\{3,8\},\{4,7\},\{5,6\},\{1\}\} \\
\mathcal{C}_2 &= min.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_3 &= \{\{3\},\{1,5\},\{2,4\},\{7,8\},\{6\}\} \\
\mathcal{C}_3 &= min.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_4 &= \{\{4\},\{1,8\},\{2\},\{3\},\{5\},\{6\},\{7\}\} \\
\mathcal{C}_4 &= min.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_5 &= \{\{5\},\{3,7\},\{1\},\{2\},\{4\},\{6\},\{8\}\} \\
\mathcal{C}_5 &= \{\{5\},\{1,2\},\{3\},\{4\},\{6\},\{7\},\{8\}\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_6 &= \{\{6\},\{2,7\},\{1\},\{3\},\{4\},\{5\},\{8\}\} \\
\mathcal{C}_6 &= \{\{6\},\{1,3\},\{2\},\{4\},\{5\},\{7\},\{8\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_7 &= \{\{7\},\{1,4\},\{3,6\},\{5,8\},\{2\}\} \\
\mathcal{C}_7 &= min.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_8 &= \{\{8\},\{3,4\},\{1\},\{2\},\{5\},\{6\},\{7\}\} \\
\mathcal{C}_8 &= min.
\end{aligned}$$

Pertanto, non esiste alcun sottoinsieme (regolare) A di $I = \{1, \ldots, 8\}$, $A \neq \emptyset, I$; tale che $p_A \leq \mathcal{A}_i$ o $p_A \leq \mathcal{C}_i$ per ogni $i \in A$. Ne segue che $D(\mathcal{E}) = \{\emptyset, I\}$ (e, ovviamente, $D(\mathcal{E}^{-1}) = \{\emptyset, I\}$).

4 $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppi

I gruppi ai quali si fa riferimento sono abeliani e senza torsione, pertanto, in tale contesto, *gruppo* sta per *gruppo abeliano senza torsione*.

Un gruppo si dice completamente decomponibile se è somma diretta di gruppi di rango 1. I gruppi completamente decomponibili furono completamente classificati da R. Baer circa ottanta anni fa [4]. I risultati di Baer sono stati ampiamente generalizzati da F. Richman circa cinquanta anni dopo [25].

Un gruppo di rango finito si dice un gruppo di Butler se è un sottogruppo puro di un gruppo completamente decomponibile di rango finito o, equivalentemente, se è una sua immagine omomorfa. Tali gruppi sono stati introdotti negli anni sessanta del secolo scorso da M. C. Butler e successivamente studiati dallo stesso Butler e da vari autori (cfr. bibliografia).

Privilegiando il secondo punto di vista, denotata con $\mathrm{B}^{(n)}$ la classe dei gruppi di Butler che sono immagine omomorfa di gruppi completamente decomponibili con nuclei di rango n, il problema della classificazione di tali gruppi viene affrontato a partire dai $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppi.

E' immediato osservare che un gruppo G di rango $m-1$ è un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo se e solo se è somma di m sottogruppi puri di rango 1, ossia, se esistono m elementi $g_1, \ldots, g_m$ di G tali che:

$$G = \langle g_1 \rangle_* + \cdots + \langle g_m \rangle_*.$$

Chiaramente, i g_i soddisfano una sola relazione lineare, se tale relazione è

$$\sum_{i=1}^{m} g_i = 0,$$

G si dice *regolare* e la m-upla $(g_1, \ldots, g_m)$ si dice una *base* di G.

La regolarità di G assicura che, denotata con R_i la caratteristica e con t_i il tipo di ogni g_i in G, le m-uple $(R_1, \ldots, R_m)$ e $(t_1, \ldots, t_m)$ sono regolari. Tali m-uple si dicono rispettivamente *base di caratteristiche* e *base di tipi* (della base $(g_1, \ldots, g_m)$) di G.

E' semplice osservare che ogni m-upla regolare di caratteristiche (risp. tipi) è la base di caratteristiche (risp. di tipi) di un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo regolare.

Con $char_G(g)$ e $t_G(g)$ si denotano rispettivamente la caratteristica e il tipo di un elemento g di G. L'insieme dei tipi degli elementi di G è detto *typeset* di G e si denota con $T(G)$. Il typeset di G è un sotto-$\wedge$-semireticolo finito del reticolo dei tipi ed è quindi un reticolo (cfr. 4.1).

I prossimi risultati mostrano che ogni $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo non regolare è somma diretta di due $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppi regolari, ossia un $\mathrm{B}^{(2)}$-gruppo degenere [18].

Proposizione 4.0.1 [20] *Un gruppo completamente decomponibile di rango finito è un* $\mathrm{B}^{(1)}$*-gruppo regolare. Inoltre, un* $\mathrm{B}^{(1)}$*-gruppo regolare è completamente decomponibile se e solo se ha una base di caratteristiche che contiene un elemento che è l'estremo inferiore dei rimanenti.*

Dim. Sia $G = \langle h_1 \rangle_* \oplus \cdots \oplus \langle h_{m-1} \rangle_*$ completamente decomponibile. Posto $h_m = -(h_1 + \cdots + h_{m-1})$, si ha: $G = \langle h_1 \rangle_* + \cdots + \langle h_m \rangle_*$ e $\sum_{i=1}^{m} h_i = 0$. Pertanto, G è un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo regolare e $(h_1, \ldots, h_m)$ è una sua base. Denotata con $(R_1, \ldots, R_m)$ la base di caratteristiche di tale base è immediato osservare che $R_m = \bigcap_{i \neq m} R_i$.

Viceversa, se G è un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo regolare e $(g_1, \ldots, g_m)$ è una base di G con base di caratteristiche $(R_1, \ldots, R_m)$ dove $R_m = \bigcap_{i \neq m} R_i$, allora è semplice verificare che $G = \langle g_1 \rangle_* \oplus \cdots \oplus \langle g_{m-1} \rangle_*$. $\square$

Proposizione 4.0.2 [20] *Ogni* $\mathrm{B}^{(1)}$*-gruppo non regolare è somma diretta di un* $\mathrm{B}^{(1)}$*-gruppo regolare e di un gruppo completamente decomponibile.*

Dim. Sia $G = \langle h_1 \rangle_* + \cdots + \langle h_m \rangle_*$ un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo non regolare di rango $m-1$. Se $\sum_{i=1}^{m} r_i h_i = 0$ è la relazione lineare fra gli h_i, posto $E = \{i \in I \mid r_i \neq 0\}$ e $g_i = r_i h_i$ per ogni $i \in E$, è semplice osservare che $+_{i \in E} \langle g_i \rangle_*$ è un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo regolare. Essendo G non regolare allora $E \subset I$ e di conseguenza si ha

$$G = (\underset{i \in E}{+} \langle g_i \rangle_*) \oplus (\bigoplus_{i \in E^{-1}} \langle h_i \rangle_*). \ \square$$

Pertanto, nello studio dei $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppi limitarsi a quelli regolari non lede la generalità.

Chiaramente, $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppi che hanno una stessa base di caratteristiche sono isomorfi, non lo sono invece, in generale, $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppi con una stessa base di tipi. In tal caso, i gruppi sono l'uno isomorfo ad un sottogruppo d'indice finito dell'altro, relazione che va sotto il nome di *quasi-isomorfismo.*

Teorema 4.0.3 [20] $\mathrm{B}^{(1)}$*-gruppi con una stessa base di tipi sono quasi-isomorfi.*

Dim. Siano G_1 e G_2 due $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppi. Se $(g_1, \ldots, g_m)$, (risp. $(h_1, \ldots, h_m)$), è una base di G_1, (risp. di G_2), con base di tipi $(t_1, \ldots, t_m)$, si ha: $G_1 = R_1 g_1 + \cdots + R_m g_m$ e $G_2 = S_1 h_1 + \cdots + S_m h_m$ dove $R_i, S_i \in t_i$ per ogni $i \in I$. Avendosi, dunque, che $R_i = (m_i/n) S_i$ per opportuni interi $m_1, \ldots, m_m, n$, posto $K_i = (1/n) S_i$ e $y_i = n h_i$ per ogni $i \in I$, si ha: $G_2 = K_1 y_1 + \cdots + K_m y_m$ e $y_1 + \cdots + y_m = 0$. Dal fatto che $R_i = m_i K_i \leq K_i$, segue che l'applicazione

$$\varphi : g = r_1 g_1 + \cdots + r_m g_m \in G_1 \to \varphi(g) = (r_1/n) y_1 + \cdots + (r_m/n) y_m \in G_2$$

è ben posta ed è un monomorfismo. Di conseguenza, si ottiene l'asserto una volta osservato che l'indice di

$$\varphi(G_1) = R_1 y_1 + \cdots + R_m y_m = (m_1 K_1) y_1 + \cdots + (m_m K_m) y_m$$

in G_2 è n. $\Box$

Come si vedrà, tutte le proprietà strutturali di un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo sono riconoscibili a partire da una sua base di tipi, ossia sono invarianti per quasi-isomorfismi. Da ciò la scelta di studiare tali gruppi a meno di quasi-isomorfismi. In accordo con ciò, ricordato che un gruppo si dice quasi completamente decomponibile se ha un sottogruppo d'indice finito completamente decomponibile e che si dice fortemente indecomponibile se tutti i suoi sottogruppi d'indice finito sono indecomponibili, d'ora in avanti, salvo preavviso, *uguale* starà per *quasi-uguale*, *isomorfo* per *quasi-isomorfo*, *completamente decomponibile* per *quasi-completamente decomponibile*, *indecomponibile* per *fortemente indecomponibile*.

Infine, è importante tenere presente che, in tale contesto, un risultato tipo Krull-Schmidt assicura che le decomposizioni dirette in indecomponibili sono uniche a meno d'isomorfismi [2].

Una base di tipi di un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo è una m-upla regolare di tipi. Pertanto, per quanto osservato nel paragrafo 2.4, è la base di un $\mathcal{T}$-*morfismo*.

Si danno le seguenti definizioni:

Definizione 4.0.4 *Un $\mathcal{T}$-morfismo rappresenta un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo se la sua base è una base di tipi del gruppo.*

Definizione 4.0.5 *Una tenda rappresenta un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo se è l'insieme dei primi di un $\mathcal{T}$-morfismo che rappresenta il gruppo.*

Definizione 4.0.6 *Una m-upla di partizioni è la base di partizioni di un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo se è la base di partizioni di una tenda che lo rappresenta.*

Quanto verrà provato nel corso del paragrafo 4.2 consente di affermare che

Proposizione 4.0.7 *Due tende rappresentano lo stesso $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo se e solo se esiste un cambio-base fra di esse.*

Chiaramente, per le convenzioni adottate, $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppi rappresentati dallo stesso $\mathcal{T}$-*morfismo* sono isomorfi, non lo sono, invece, in generale, $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppi rappresentati dalla stessa tenda. Quanto verrà osservato nei prossimi paragrafi consente, però, di affermare che se G_1 e G_2 sono $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppi rappresentati dalla stessa tenda allora:

- I typeset di G_1e G_2 sono reticoli isomorfi (cfr. 2.4.12 e cfr. 4.1),
- G_1 e G_2 hanno gli stessi "cambi-base" (cfr. 4.2),
- G_1 e G_2 hanno le stesse decomposizioni dirette (cfr. 4.3 e cfr. 5.2).

Pertanto, in tale ambito, per il lemma 2.4.13, non lede la generalità limitarsi a considerare tipi costituiti da tutti 0 fatta eccezione che per un numero finito di ∞.

D'ora in avanti, se G denoterà un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo rappresentato da un $\mathcal{T}$-*morfismo* t di base $(t_1, \ldots, t_m)$ allora con $(g_1, \ldots, g_m)$ si denoterà una base di G con base di tipi $(t_1, \ldots, t_m)$. Per ogni $E \subseteq I$, l'elemento $\sum\limits_{i \in E} g_i$ verrà denotato con g_E.

4.1 Il typeset di un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo

Sia G un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo rappresentato da un $\mathcal{T}$-*morfismo* t di base $(t_1, \ldots, t_m)$. E' semplice verificare che, per un elemento g di G, la partizione di I che si ottiene a partire da un'espressione di g come combinazione lineare dei g_i, $g = \sum\limits_{i=1}^{m} r_i g_i$, mettendo in blocchi uguali indici per i quali i coefficienti r_i sono uguali, non dipende dalla particolare combinazione scelta: tale partizione si denota con $part_t(g)$. Posto, per ogni $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\} \in \mathbb{P}(m)$,

$$G(\mathcal{C}) = \{g \in G \mid part_t(g) \geq \mathcal{C}\},$$

è semplice osservare che $G(\mathcal{C})$ è un sottogruppo puro di G. In alcuni casi, per un sottoinsieme E di I, verrà usata la notazione G_E in luogo di $G(p_E)$.

Lemma 4.1.1 *Valgono le seguenti*:

(i) $G(\mathcal{C}) = \langle g_{C_1} \rangle_* + \cdots + \langle g_{C_k} \rangle_*$;

(ii) $G(\mathcal{C})$ *è un* $\mathrm{B}^{(1)}$*-gruppo di rango* $|\mathcal{C}| - 1$;

(iii) $(t_{C_1}, \ldots, t_{C_k})$ *è una base di tipi di* G.

Lemma 4.1.2 *Per ogni* $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{P}(m)$, *si ha*:

(i) $G(\mathcal{C}) \leq G(\mathcal{D})$ *se e solo se* $\mathcal{D} \leq \mathcal{C}$;

(ii) $G(\mathcal{C}) + G(\mathcal{D}) \leq G(\mathcal{C} \wedge \mathcal{D})$;

(iii) $G(\mathcal{C} \vee D) = G(\mathcal{C}) \cap G(\mathcal{D})$.

Inoltre, se $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ e $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_s\}$ sono partizioni di I tali che $\mathcal{C} \leq \mathcal{D}$, allora essendo ogni blocco di $\mathcal{D}$ unione di blocchi di $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ può essere riguardata come una partizione di $\mathcal{C}$. Posto, per ogni $j \in \{1, \ldots, s\}$, $D_j^* = \{i \in \{1, \ldots, k\} \mid C_i \subseteq D_j\}$ e $D^* = \{D_j^* \mid j \in \{1, \ldots, s\}\}$, si ha:

Lemma 4.1.3 [10] *Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{P}(m)$. Se $\mathcal{C} \leq \mathcal{D}$ allora $G(\mathcal{C})(\mathcal{D}^*) = G(\mathcal{D})$.*

Dim. Per definizione si ha:

$$G(\mathcal{C})(\mathcal{D}^*) = \langle \sum_{i \in D_1^*} g_{C_i} \rangle_* + \cdots + \langle \sum_{i \in D_s^*} g_{C_i} \rangle_* = \langle g_{D_1} \rangle_* + \cdots + \langle g_{D_s} \rangle_* = G(\mathcal{D}). \ \square$$

Il prossimo risultato ha come conseguenza che il typeset di un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo coincide con l'insieme delle immagini di ogni $\mathcal{T}$-*morfismo* che lo rappresenta.

Teorema 4.1.4 [20] *Se G è un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo rappresentato da un $\mathcal{T}$-morfismo t allora $t_G(g) = t(part_t(g))$ per ogni $g \in G$.*

Dim. Sia $(R_1, \ldots, R_m)$ la base di caratteristiche della base $(g_1, \ldots, g_m)$ di G. Sia $g \in G$. Se $g = 0$ allora $t_G(0) = t(\{\emptyset, I\})$.

Sia E un sottoinsieme proprio di I. Se una potenza p^α di un primo p divide g_E allora per opportuni $r_i \in R_i$ si ha $g_E = p^\alpha(\sum_{i=1}^{m} r_i g_i)$ e di conseguenza $\sum_{i \in E}(1 + p^\alpha r_i)g_i + \sum_{i \in E^{-1}}(p^\alpha r_i)g_i = 0$. Dovendo i coefficienti di tale relazione coincidere, si ha: $r = r_i \in \bigcap_{j \in E} R_j$ per ogni $i \in E$, $s = r_i \in \bigcap_{j \in E^{-1}} R_j$ per ogni $i \in E^{-1}$ e $1 + p^\alpha r = p^\alpha s$. Ne deriva che $s - r = 1/p^\alpha \in (\bigcap_{j \in E} R_j) + (\bigcap_{j \in E^{-1}} R_j)$ e quindi $char_G(g_E) \leq (\bigcap_{j \in E} R_j) + (\bigcap_{j \in E^{-1}} R_j)$. Dal fatto che $g_E = g_{I \setminus E}$ segue allora $char_G(g_E) = (\bigcap_{j \in E} R_j) + (\bigcap_{j \in E^{-1}} R_j)$ e di conseguenza $t(g_E) = t_E$.

Se $part_t(g) = \mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ allora $g = c_1 g_{C_1} + \cdots + c_k g_{C_k}$ e quindi $char_G(g) \geq char_G(g_{C_1}) \wedge \cdots \wedge char_G(g_{C_k})$. Ora, tali caratteristiche hanno lo stesso tipo. Per provarlo è sufficiente osservare che l'eventualità che per un primo p esista un $\beta \in \mathbb{N}$ tale che p^β divida g con β maggiore strettamente del più grande $\alpha \in \mathbb{N}$ tale che p^α divide ogni g_{C_i}, ha luogo per un numero finito di primi e che per tali primi β è limitato.

Se p^β divide g allora per opportuni razionali r_i si ha $p^\beta(\sum_{i=1}^{m} r_i g_i) = g$ e di conseguenza $r_i = r'_j$ per ogni $i \in C_j$ e $p^\beta r'_j - c_j = p^\beta r'_h - c_h$ per ogni $j, h \in \{1, \ldots, k\}$. Allora, $p^\beta(r'_h - r'_j) = (c_j - c_h)$ ed essendo $(r'_h - r'_j)$ divisibile al più per p^α, necessariamente $p^{\beta - \alpha}$deve dividere $(c_j - c_h)$ ed è quindi evidente che ciò può accadere solo per un numero finito di primi e che β non può essere arbitrariamente grande.

In definitiva, si ha allora che $t_G(g) = t_G(g_{C_1}) \wedge \cdots \wedge t_G(g_{C_K}) = t_{C_1} \wedge \cdots \wedge t_{C_k} = t(\mathcal{C}) = t(part_t(g))$. $\square$

Corollario 4.1.5 $T(G) = Im(t) = \{t(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \in \mathbb{P}(m)\}$.

Infine, la proposizione 4.1.3 consente di fornire una importante caratterizzazione dei classici sottogruppi puri e pienamente invarianti

$$G(\sigma) = \{g \in G \mid t_G(g) \geq \sigma\}$$

al variare di σ in $T(G)$.

Corollario 4.1.6 [14] *Per ogni* $\sigma \in T(G)$, $G(\sigma) = G(part_t(\sigma))$.

Dim. Se $\sigma \leq t_G(g)$ allora $part_t(\sigma) \leq part_t(t_G(g)) \leq part_t(g)$; viceversa, se $part_t(\sigma) \leq part_t(g)$ allora $\sigma \leq t(part_t(g)) = t_G(g)$. $\square$

4.2 I cambi-base

Un B$^{(1)}$-gruppo può avere diverse basi di tipi (equivalentemente essere rappresentato da differenti $\mathcal{T}$-*morfismi*).

Sia G un B$^{(1)}$-gruppo rappresentato da un $\mathcal{T}$-*morfismo* t di base $(t_1, \dots, t_m)$. Vale il seguente:

Teorema 4.2.1 [17] *Le basi di tipi di* G *sono le* m*-uple* $(t_{E_1}, \dots, t_{E_m})$ *ove* $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ *è un cambio-base della tenda* $P(t)$.

Dim. Sia $(u_1, \dots, u_m)$ una base di tipi di G e sia u il $\mathcal{T}$-*morfismo* che la ha come base. Siano $\pi_1, \dots, \pi_k$ gli elementi $\vee$-irriducibili di $T(G)$. Dal corollario 4.1.5 segue che $Im(u) = Im(t) = T(G)$. Pertanto, posto $part_t(\pi_i) = p_{A_i}$ e $part_t(\pi_i) = p_{B_i}$ per ogni $i = 1, \dots, k$, si ha: $P(u) = \{B_1, \dots, B_k\}$ e $P(t) = \{A_1, \dots, A_k\}$.

Se $J \subseteq \{1, \dots, k\}$, denotato con $\sigma = \bigvee_{i \in J} \pi_i$, dal corollario 4.1.6 segue che $G(\sigma) = G(part_t(\sigma)) = G(\bigvee_{i \in J} p_{A_i})$ e $G(\sigma) = G(part_u(\sigma)) = G(\bigvee_{i \in J} p_{B_i})$ e dunque che le partizioni $\bigvee_{i \in J} p_{A_i}$ e $\bigvee_{i \in J} p_{B_i}$ hanno lo stesso ordine. Allora, per ol teorema 2.3.7 esiste un cambio-base $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ fra le tende $\{A_1, \dots, A_k\}$ e $\{B_1, \dots, B_k\}$ tale che $\mathcal{E}(A_i) = B_i$ per ogni $i = 1, \dots, k$.

Per verificare che $u_i = t_{E_i}$, per ogni $i \in I$, è sufficiente osservare che tali elementi sono generati dagli stessi π_j. Ora, $\pi_j = \upsilon_{Bj} \leq u_i$ se e solo se $i \in B_j = \mathcal{E}(A_j)$ ossia se e solo se $b_{Ei} \geq p_{A_j} = part_t(\pi_j)$ il che equivale a $t_{E_i} \geq \pi_j$.

Viceversa, sia $\mathcal{E}$ un cambio base della tenda $P(t)$. L'ammissibilità di $\mathcal{E}$ assicura che gli elementi $g_{E_1}, \dots, g_{E_m}$ di G sono a $m-1$ a $m-1$ indipendenti; inoltre, per il rango di G, esistono m coefficienti $a_1, \dots, a_m$, tali che $\sum_{i \in I} a_i g_{Ei} = 0$.

Posto $y_i = a_i g_{E_i}$ per ogni $i \in I$, $Y = \langle y_1 \rangle_* + \cdots + \langle y_m \rangle_*$ è un B$^{(1)}$-gruppo con base di tipi $(t_{E_1}, \ldots, t_{E_m})$.

Sia $\mathcal{F} = (b_{F_1}, \ldots, b_{F_m})$ l'inverso di $\mathcal{E}$. Gli elementi $y_{F_1}, \ldots, y_{F_m}$ di Y sono a $m-1$ a $m-1$ indipendenti e inoltre, per il rango di Y, esistono m coefficienti $b_1, \ldots, b_m$ tali che $\sum\limits_{i \in I} b_i y_{F_i} = 0$. Posto $h_i = b_i y_{F_i}$, $H = \langle h_1 \rangle_* + \cdots + \langle h_m \rangle_* \leq Y \leq G$ è un B$^{(1)}$-gruppo con base di tipi $(u_{F_1}, \ldots, u_{F_m})$.

Ora $t_i = u_{F_i}$ per ogni $i \in I$. Infatti, $u_{Fi} = (\bigwedge\limits_{h \in F_i} t_{E_h}) \vee (\bigwedge\limits_{h \in F_i^{-1}} t_{E_h}) = t((\bigwedge\limits_{h \in F_i} b_{E_h}) \vee (\bigwedge\limits_{h \in F_i^{-1}} b_{E_h})) \leq t_i$; inoltre, se $\pi_j \leq t_i$ allora $i \in A_j = \mathcal{F}(B_j)$ ossia $b_{F_i} \geq p_{B_j}$ e pertanto $\pi_j \leq u_{Fi}$.

Da ciò segue che H è isomorfo ad un sottogruppo d'indice finito di G e quindi, in tale contesto, H è uguale a G. Ne deriva che $Y = G$ e dunque che il $\mathcal{T}$-*morfismo* di base $(u_1, \ldots, u_m) = (t_{E_1}, \ldots, t_{E_m})$ rappresenta G. $\Box$

Dal corollario 2.4.5 segue che il $\mathcal{T}$-*morfismo* di base $(t_{E_1}, \ldots, t_{E_m})$ ha $\mathcal{E}(P(t))$ come insieme dei primi e di conseguenza, come preannunciato nella proposizione 4.0.7, le tende che rappresentano G sono tutte e sole quelle che si ottengono a partire da $P(t)$ attraverso un cambio-base.

Dunque, per calcolare tutte le basi di tipi di G si può procedere (cfr. 2.1.8) al calcolo di tutte le tende che si ottengono a partire da $P(t)$ attraverso un cambio-base $\mathcal{E}$: ciascuna di tali tende è l'insiemi dei primi del $\mathcal{T}$-*morfismo* di base $(t_{E_1}, \ldots, t_{E_m})$ che rappresenta G.

Infine, si osservi che per ottenere una base di G con base di tipi $(t_{E_1}, \ldots, t_{E_m})$ è sufficiente considerare una combinazione lineare di $g_{E_1}, \ldots, g_{E_m}$ a coefficienti non tutti nulli che dia 0, infatti, se $a_1 g_{E_1} + \cdots + a_m g_{E_m} = 0$ e $a_1, \ldots, a_m$ non sono tutti nulli allora $(a_1 g_{E_1}, \ldots, a_m g_{E_m})$ è una base di G la cui base di tipi è $(t_{E_1}, \ldots, t_{E_m})$.

4.3 Gruppi completamente decomponibili

A questo punto, sfruttando i risultati del secondo capitolo, si è in grado di fornire una caratterizzazione dei gruppi completamente decomponibili.

Dalla proposizione 4.0.1 segue che un gruppo è completamente decomponibile se e solo se possiede una base di tipi contenente un elemento che è l'estremo inferiore dei rimanenti. Tale proprietà non è però verificata da tutte le basi di tipi del gruppo.

I prossimi risultati mostrano in che modo è possibile dedurre dall'insieme dei primi di un qualsiasi $\mathcal{T}$-*morfismo* che rappresenta un B$^{(1)}$-gruppo, ossia da una tenda che rappresenta il gruppo, se si tratta o meno di un gruppo completamente decomponibile.

Proposizione 4.3.1 *Per un $\mathcal{T}$-morfismo t di base $(t_1, \ldots, t_m)$ sono equivalenti le seguenti condizioni*:

(i) *esiste un $j \in I$ tale che $t_j = \bigwedge_{i \neq j} t_i$;*

(ii) *se $A \in P(t)$ e $A \neq I$ allora $j \in A^{-1}$.*

Dim. Denotati con $\pi_1, \ldots, \pi_k$, gli elementi $\vee$-irriducibili di $Im(t)$, l'asserto segue immediatamente dal fatto che $P(t) = \{A_1, ..., A_k\}$ ove

$$A_j = \{i \in I \mid \pi_i \leq t_j\}$$

per ogni $j \in \{1, \ldots, k\}$. $\square$

Dalla definizione di catena chiusa di una tenda segue immediatamente che

Lemma 4.3.2 *Se $\boldsymbol{T}$ è una tenda tale che $\cap\{A^{-1} \mid A \in \boldsymbol{T}$ e $A \neq I\} \neq \emptyset$ allora $\boldsymbol{T}$ è priva di catene chiuse.*

Dunque, in definitiva, vale il seguente:

Teorema 4.3.3 *Se G un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo rappresentato da una tenda $\boldsymbol{T}$ allora G è completamente decomponibile se e solo se $\boldsymbol{T}$ è priva di catene chiuse.*

Dim. Se G è completamente decomponibile allora per i lemmi precedenti esiste una tenda $\boldsymbol{T}'$ che rappresenta G priva di catene chiuse. Dalla proposizione 4.0.7 segue che $\boldsymbol{T} = \mathcal{E}(\boldsymbol{T}')$ dove $\mathcal{E}$ è un cambio-base di $\boldsymbol{T}'$. Dal lemma 2.3.1 segue allora che anche $\boldsymbol{T}$ è priva di catene chiuse.

Viceversa, sia $\boldsymbol{T}$ sia priva di catene chiuse. Sia $\boldsymbol{T} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ e senza ledere la generalità sia $A_1 = I$. Se $k = 1$ allora l'asserto è banale. Sia $k \geq 2$ e $j \in A_2^{-1}$. Posto $B_1 = I$, $B_2 = A_2$ e per ogni $i \in \{3, \ldots, k\}$:

- $B_i = A_i$ se $j \notin A_i$,
- $B_i = (A_i \backslash \{j\}) \cup \{h\}$ dove $h \in A_i^{-1}$ se $j \in A_i$ e $A_2^{-1} \cap A_i^{-1} = \emptyset$,
- $B_i = (A_i \backslash \{j\}) \cup \{h\}$ dove $h \in A_2^{-1} \cap A_i^{-1}$ se $j \in A_i$ e $A_2^{-1} \cap A_i^{-1} \neq \emptyset$;

e' semplice verificare che la tenda $\boldsymbol{T}' = \{B_1, \ldots, B_k\}$ verifica le proprietà:

- $|B_i| = |A_i|$ per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$,
- $|B_i^{-1} \cap B_j^{-1}| = s \geq 2$ se e solo se $|B_i^{-1} \cap B_j^{-1}| = s$ per ogni $i, j \in \{1, \ldots, k\}$,
- $\{B_1, \ldots, B_k\}$ è priva di catene chiuse.

Pertanto, dalla proposizione 2.3.5 segue che esiste un cambio-base fra la tenda $\boldsymbol{T}$ e la tenda $\boldsymbol{T}'$ e di conseguenza anche la tenda $\boldsymbol{T}'$ rappresenta G. Osservato che $j \in B_i^{-1}$ per ogni $i \in \{2, \ldots, k\}$, dalla proposizione 4.3.1 segue che G è completamente decomponibile. $\square$

Il risultato ottenuto fornisce un ovvio algoritmo “a vista” per decidere se un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo è completamente decomponibile oppure no, senza ricorrere al procedimento per decomporre un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo nei suoi addendi diretti indecomponibili descritto nel prossimo paragrafo.

4.4 Decomposizione in addendi diretti indecomponibili

Partendo da una base di partizioni di un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo è possibile calcolare, a meno d'isomorfismi, la sua decomposizione in addendi diretti indecomponibili. Sia G un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo rappresentato da un $\mathcal{T}$-*morfismo* t di base $(t_1, \ldots, t_m)$.

Proposizione 4.4.1 [14] *Se* $part_t(t_j) = \{\{j\}, C_2, \ldots, C_k\} < p_j$ *allora*

$$G = G(p_{C_2}) \oplus \cdots \oplus G(p_{C_k}).$$

Dim. Posto $H = G(p_{C_2}) \oplus \cdots \oplus G(p_{C_k})$, è ovvio che $\{g_1, \ldots, g_m\} \subseteq H \leq G$ e che $t_H(g_i) = t_G(g_i)$ per ogni $i \neq j$; inoltre, dal fatto che $g_j = -g_{C_2} \cdots - g_{C_k}$ segue che $t_H(g_j) = t_H(g_{C_2}) \wedge \cdots \wedge t_H(g_{C_k}) = t_{C_2} \wedge \cdots \wedge t_{C_k} = t_G(g_j)$ e quindi che $G = H$. $\square$

Proposizione 4.4.2 [20] *Se* G *è decomponibile allora esiste almeno un indice* $j \in I$ *per il quale* $part_t(t_j) < p_j$.

Dim. Sia $G = A \oplus B$. Se $part_t(t_i) = p_i$ per ogni $i \in I$, allora $G(p_i) = G(t_i) = A(t_i) + B(t_i)$ ha rango uno e di conseguenza o $A(t_i)$ o $B(t_i)$ è nullo. Allora, ogni g_i appartiene o ad A o a B. Se gli insiemi $E = \{i \in I \mid g_i \in A\}$ e $F = \{i \in I \mid g_i \in B\}$ fossero entrambi non vuoti si avrebbe che $0 \neq g_E = g_F \in A \cap B$ il che è assurdo. Pertanto, o $\{g_1, \ldots, g_m\} \subseteq A$ o $\{g_1, \ldots, g_m\} \subseteq B$. Se $\{g_1, \ldots, g_m\} \subseteq A$ allora dal fatto che $t_A(g_i) = t_i$ per ogni $i \in I$ segue che $G = A$. Il caso $\{g_1, \ldots, g_m\} \subseteq B$ è analogo. $\square$

Da tali proposizioni segue immediatamente:

Teorema 4.4.3 [14] G *è indecomponibile se e solo se* $part_t(t_i) = p_i$ *per ogni* $i \in I$.

In accordo con ciò, i t_i per i quali $part_t(t_i) < p_i$ si dicono tipi di decomposizione.

4.4.4 [14] **Algoritmo per la decomposizione di un** $\mathrm{B}^{(1)}$**-gruppo in addendi diretti indecomponibili.**
Sia $S = \{i \in I \mid part_t(t_i) < p_i\} = \{i_1, \ldots, i_q\}$.
Se $q = 0$ (equiv.$S = \varnothing$) allora G è indecomponibile.
Sia $q \geq 1$. Se $part_t(t_{i_1}) = \mathcal{C} = \{\{i_1\}, C_2, \ldots, C_s\}$ dalla proposizione 4.4.1 segue che

$$G = G(p_{C_2}) \oplus \cdots \oplus G(p_{C_s})$$

dove, ogni $G(p_{C_j})$ è un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo ed è rappresenato dal $\mathcal{T}$-*morfismo* $t^{|}$ di base $(t_i, t_{C_j} \mid i \in C_j)$. Per il corollario 2.4.16 allora $part_{t^{|}}(t_i) = (p_{C_j} \vee part_t(t_i))^*$ e $part_{t^{|}}(t_{C_j}) = (p_{C_j} \vee part_t(t_{C_j}))^* = (p_{C_j} \vee \{p_A \mid p_A \leq b_{C_j}\ e\ A \in P(t)\})^* \geq (p_{C_j} \vee \{p_A \mid i \in A\ e\ A \in P(t)\})^* = b^*_{C_j}$ (ove con * s'intende che tali partizioni sono riguardate come partizioni di p_{C_j}). Pertanto, l'insieme dei tipi di decomposizione di ogni $G(p_{C_j})$ è incluso in $\{t_{i_2}, \ldots, t_{i_q}\}$.

Si passa allora a considerare t_{i_2}. Chiaramente, esiste un $j \in \{2, \ldots, s\}$ tale che $i_2 \in C_j$. Se $part_{t^{|}}(t_{i_2}) = p_{i_2}$ si passa allora a considerare i_3. Se, invece, $part_{t^{|}}(i_2) = \{\{i_2\}, D_2, \ldots, D_r\}$ dalla proposizione 4.4.1 segue che $G(p_{C_j}) = G(p_{C_j})(p_{D_2}) \oplus \cdots \oplus G(p_{C_j})(p_{Dr})$. Senza ledere la generalità, sia D_r il blocco di $part_{t^{|}}(i_2)$ che contiene C_j^{-1}. E' semplice verificare che $G(p_{C_j})(p_{D_h}) = G(p_{D_h})$ per ogni $h = 2, \ldots, r-1$ e $G(p_{C_j})(p_{D_r}) = G(p_{C_j} \vee p_{D_r})$. Pertanto, si ha:

$$G = \left(\bigoplus_{i=2}^{j-1} G(p_{C_i})\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=2}^{r-1} G(p_{D_i})\right) \oplus G(p_{C_j} \vee p_{D_r}) \oplus \left(\bigoplus_{i=j+1}^{s} G(p_{C_i})\right);$$

inoltre, analogamente a quanto osservato prima, l'insieme dei tipi di decomposizione di ciascuno di tali addendi è incluso in $\{t_{i_3}, \ldots, t_{i_q}\}$.

Appare evidente che, reiterando tale procedimento, in un numero finito di passi, si ottiene la decomposizione diretta di G in addendi indecomponibili. $\square$

Corollario 4.4.5 [14] *Se H è un addendo diretto indecomponibile di G allora esiste una partizione $\mathcal{C}$ di I tale che $H \cong G(\mathcal{C})$.*

Nel prossimo capitolo tale risultato verrà generalizzato ad ogni addendo diretto di G.

5 Basi di partizioni e decomposizioni dirette di $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppi

I risultati riportati in questo capitolo costituiscono l'argomento dell'articolo [10]. Si inizierà col determinare quali m-uple di partizioni sono basi di partizioni di tende e dunque di $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppi. Poi, si proverà che ogni addendo diretto di un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo G è, a meno d'isomorfismi, un $G(\mathcal{C})$ per un'opportuna partizione $\mathcal{C}$. Nel terzo paragrafo, assegnate due partizioni $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ che siano candidate a dare luogo ad addendi diretti complementari, si determinerà il più generale $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo che possiede una decomposizione del tipo $G = G(\mathcal{C}) \oplus G(\mathcal{D})$. Infine, nel quarto paragrafo, verrà mostrato che se uno dei due addendi è indecomponibile allora le due partizioni coinvolte hanno una particolare forma. Tali risultati danno un contributo alla soluzione di un problema aperto: quello di decidere quando la somma diretta di due $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppi è un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo (problema risolto solo per la somma di due indecomponibili [18]).

5.1 La proprietà quasi-distributiva

Le prossime proposizioni consentono di caratterizzare le m-uple di partizioni che sono basi di partizioni di tende.

Definizione 5.1.1 *Una m-upla di partizioni $(\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m)$ di I si dice quasi-distributiva se*

- $\mathcal{C}_i \leq p_i$ *per ogni* $i \in I$;
- *per ogni* $i \neq j$,

(#) *un blocco di $\mathcal{C}_i$ non contenente j è o uguale ad un blocco di $\mathcal{C}_j$ o è incluso nel blocco di $\mathcal{C}_j$ contenente i.*

Visualizzando:

$$\mathcal{C}_i = \{\{i\}, C_j, Y_1, \ldots, Y_s, Z_1, \ldots, Z_r\}$$
$$\mathcal{C}_j = \{\{j\}, C_i, H_1, \ldots, H_q, Z_1, \ldots, Z_r\}$$

dove $C_j \supseteq \{j\} \cup H_1 \cup \cdots \cup H_q$ e $C_i \supseteq \{i\} \cup Y_1 \cup \cdots \cup Y_s$.

Costruire manualmente una m-upla di partizioni quasi-distributiva diventa molto complicato, a meno che molte di esse non siano bipartizioni puntate.

La prossima proposizione mostra che questa proprietà è necessaria affinché una m-upla di partizioni sia la base di partizioni di una tenda.

Proposizione 5.1.2 *Se $\boldsymbol{T}$ è una tenda allora la m-upla*

$$(part_{\boldsymbol{T}}(t_1), \ldots, part_{\boldsymbol{T}}(t_m))$$

è quasi-distributiva.

Dim. E' ovvio che $part_{\boldsymbol{T}}(t_i) \leq p_i$ per ogni $i \in I$. Per definizione $part_{\boldsymbol{T}}(t_i) = \vee\{p_A \mid A \in \boldsymbol{T} \text{ e } i \in A\}$. Se $i \neq j$, posto:

- $H = \cap\{A \in \boldsymbol{T} \mid i \in A \text{ e } j \notin A\}$,
- $K = \cap\{A \in \boldsymbol{T} \mid j \in A \text{ e } i \notin A\}$;

si ha:

- $p_H = \vee\{p_A \mid A \in \boldsymbol{T}, i \in A \text{ e } j \notin A\}$,
- $p_K = \vee\{p_A \mid A \in \boldsymbol{T}, j \in A \text{ e } i \notin A\}$.

Pertanto, denotata con $\mathcal{C}$ la partizione $\vee\{p_A \mid A \in \boldsymbol{T} \text{ e } i, j \in A\}$ si ha:

- $part_{\boldsymbol{T}}(t_i) = \mathcal{C} \vee p_H$,
- $part_{\boldsymbol{T}}(t_j) = \mathcal{C} \vee p_K$.

Dunque ogni blocco di $part_{\boldsymbol{T}}(t_i)$ non contenente j è un blocco di $\mathcal{C}$ e di conseguenza o è uguale ad un blocco di $part_{\boldsymbol{T}}(t_j)$ o è incluso nel blocco di $part_{\boldsymbol{T}}(t_j)$ contenente $I \backslash K$. Ma $i \in I \backslash K$, e quindi vale la condizione (#). $\square$

Teorema 5.1.3 *La proprietà quasi-distributiva è necessaria e sufficiente affinchè una m-upla di partizioni sia la base di partizioni di una tenda.*

Dim. Resta da provare solo la sufficienza. Sia $(\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m)$ una m-upla di partizioni quasi-distributiva di I e sia $\boldsymbol{T} = \{A \subseteq I \mid p_A \leq \mathcal{C}_i \text{ per ogni } i \in A\}$ (cfr. 5.5(b) per un algoritmo). $(\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m)$ è la base di partizioni di $\boldsymbol{T}$.

La definizione di $\boldsymbol{T}$ assicura che $part_{\boldsymbol{T}}(t_i) \leq \mathcal{C}_i$ per ogni $i \in I$. Siano $C_{i_1}, \ldots, C_{i_s}$ i blocchi di $\mathcal{C}_i$ diversi da $\{i\}$. Poiché $(\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m)$ è quasi-distributiva, è facile provare che $C_{i_1}^{-1}, \ldots, C_{i_s}^{-1}$ appartengono a $\boldsymbol{T}$. Pertanto, $part_{\boldsymbol{T}}(t_i) = \vee\{p_A \mid A \in \boldsymbol{T} \text{ e } i \in A\} \geq p_{I \backslash C_{i_1}} \vee \cdots \vee p_{I \backslash C_{i_s}} = \mathcal{C}_i$ e dunque, in definitiva, $part_{\boldsymbol{T}}(t_i) = \mathcal{C}_i$. $\square$

Se $(\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m)$ è una m-upla di partizioni quasi-distributiva la tenda:

$$\{A \subseteq I \mid p_A \leq \mathcal{C}_i \textit{ per ogni } i \in A\}$$

prende il nome di *dominio* di $(\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m)$ e si denota con $dom((\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m))$.

Se $(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_m) \leq (\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m)$ è una base di partizioni di un $B^{(1)}$-gruppo H allora H è rappresentato da una sotto-tenda di $dom((\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m))$.

5.2 Gli addendi diretti di un B$^{(1)}$-gruppo

Sia G un B$^{(1)}$-gruppo rappresentato da un $\mathcal{T}$-*morfismo* t di base $(t_1, \ldots, t_m)$. La proposizione 4.4.5 assicura che gli addendi diretti indecomponibili di G sono a meno d'isomorfismi $G(\mathcal{C})$ determinati da qualche partizione $\mathcal{C}$ di I. Si verificherà, ora, che ciò ha luogo in generale.

Proposizione 5.2.1 *Sia* $G = G(\mathcal{C}_1) \oplus \cdots \oplus G(\mathcal{C}_k)$ *una decomposizione di* G *in indecomponibili. Se* $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$ *allora* $\underset{i\in J}{\oplus} G(\mathcal{C}_i) = G(\underset{i\in J}{\wedge} \mathcal{C}_i)$.

Dim. Per induzione su m. Se $m \leq 2$ allora G è indecomponibile e l'asserto è banale. Sia, allora, $m \geq 3$ e G decomponibile. Dal lemma 4.4.2 segue che esiste un $i \in I$ tale che $part_t(t_i) \leq \{\{i\}, E, F\}$ e di conseguenza $G = G_E \oplus G_F$. Allora, per ogni $i \in J = \{1, \ldots, k\}$, $G(\mathcal{C}_i)$ è un addendo diretto di G_E o di G_F, pertanto o $\mathcal{C}_i \geq p_E$ o $\mathcal{C}_i \geq p_F$. Posto:

- $I' = \{i \in \{1, ..., k\} \mid \mathcal{C}_i \geq p_E\}$,
- $I'' = \{i \in \{1, ..., k\} \mid \mathcal{C}_i \geq p_F\}$;

$\underset{i\in I'}{\oplus} G(\mathcal{C}_i)$ (risp. $\underset{i\in I''}{\oplus} G(\mathcal{C}_i)$) è una decomposizione di G_E (risp. G_F) in indecomponibili. Dal lemma 4.1.3 segue che $G(\mathcal{C}_i) = G_E(\mathcal{C}_i^*)$ per ogni $i \in I'$ e $G(\mathcal{C}_i) = G_F(\mathcal{C}_i^*)$ per ogni $i \in I''$. Pertanto $G_E = \underset{i\in I'}{\oplus} G_E(\mathcal{C}_i^*)$ e $G_F = \underset{i\in I''}{\oplus} G_F(\mathcal{C}_i^*)$. Posto $J' = J \cap I'$ e $J'' = J \cap I''$, per induzione si ha:

$$\underset{i\in J}{\oplus} G(\mathcal{C}_i) = (\underset{i\in J'}{\oplus} G_E(\mathcal{C}_i^*)) \oplus (\underset{i\in J''}{\oplus} G_F(\mathcal{C}_i^*)) = G_E(\underset{i\in J'}{\wedge} \mathcal{C}_i^*) \oplus G_F(\underset{i\in J''}{\wedge} \mathcal{C}_i^*) =$$
$$G(\underset{i\in J'}{\wedge} \mathcal{C}_i) \oplus G(\underset{i\in J''}{\wedge} \mathcal{C}_i) \leq G(\underset{i\in J}{\wedge} \mathcal{C}_i).$$

Ora, essendo $(\underset{i\in J'}{\wedge} \mathcal{C}_i) \geq p_E$ e $(\underset{i\in J''}{\wedge} \mathcal{C}_i) \geq p_F$, non è difficile provare che $G(\underset{i\in J'}{\wedge} \mathcal{C}_i) \oplus G(\underset{i\in J''}{\wedge} \mathcal{C}_i)$ e $G(\underset{i\in J}{\wedge} \mathcal{C}_i)$ hanno lo stesso rango; ma il primo è un addendo diretto di G e quindi di $G(\underset{i\in J}{\wedge} \mathcal{C}_i)$, pertanto devono coincidere. $\square$

L'unicità della decomposizione ha come conseguenza che

Teorema 5.2.2 *Se H è un addendo diretto di G allora esiste una partizione $\mathcal{C}$ di I tale che $H \cong G(\mathcal{C})$.*

Dim. Sia $H_1 \oplus \cdots \oplus H_r$ una decomposizione di H in indecomponibili. Per ogni $i \in \{1, \ldots, r\}$, H_i è un addendo indecomponibile anche di G, pertanto per la proposizione 4.4.5 esiste un $j_i \in \{1, \ldots, r\}$ tale che $H_i \cong G(\mathcal{C}_{j_i})$. Ne deriva che $H \cong G(\mathcal{C}_{j_1}) \oplus \cdots \oplus G(\mathcal{C}_{j_r}) = G(\wedge\{\mathcal{C}_{j_i} \mid i = 1, \ldots, r\})$, come cercato. □

Corollario 5.2.3 *Siano G_1 e G_2 due addendi diretti di G tali che $G_1 \cap G_2 = \{0\}$. Se $G_1 = G(\mathcal{C})$ e $G_2 = G(\mathcal{D})$ allora $G_1 \oplus G_2 = G(\mathcal{C} \wedge \mathcal{D})$.*

Se, ora, $G(\mathcal{C}) \oplus G(\mathcal{D}) = G(\mathcal{C} \wedge \mathcal{D})$ allora $G(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) = \{0\}$, ossia $\mathcal{C} \vee \mathcal{D} = max\mathbb{P}(m)$; inoltre, $|\mathcal{C}| + |\mathcal{D}| = |\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}| + 1$.

5.3 Il dominio di $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$

In questo paragrafo verrà costruita la massima tenda che rappresenta un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo G che si decompone nella somma diretta $G(\mathcal{C}) \oplus G(\mathcal{D})$ per opportune partizioni $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.

Proposizione 5.3.1 *Per due addendi diretti di G, $G(\mathcal{C})$ e $G(\mathcal{D})$, le seguenti condizioni sono equivalenti*:

(i) $G = G(\mathcal{C}) \oplus G(\mathcal{D})$;

(ii) $\mathcal{C} \vee \mathcal{D} = max(\mathbb{P}(m))$ *e* $|\mathcal{C}| + |\mathcal{D}| = m + 1$;

(iii) $\mathbb{B}(m) = V(\mathcal{C}) \oplus V(\mathcal{D})$.

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due partizioni di I tali che $\mathbb{B}(m) = V(\mathcal{C}) \oplus V(\mathcal{D})$. Denotata con b_{E_i} (risp. b_{F_i}), per ogni $i \in I$, la proiezione di p_i su $V(\mathcal{C})$ (risp. $V(\mathcal{D})$), non è difficile provare che

Proposizione 5.3.2 *Se $V(\mathcal{C}) \oplus V(\mathcal{D}) = \mathbb{B}(m)$ allora $V(\mathcal{C}) = \langle b_{E_1}, \ldots, b_{E_m} \rangle$ e $V(\mathcal{D}) = \langle b_{F_1}, \ldots, b_{F_m} \rangle$. Inoltre, $b_{E_1} + \cdots + b_{E_m} = 0$ e $b_{F_1} + \cdots + b_{F_m} = 0$.*

Se $\{i\}$ è un blocco di $\mathcal{C}$ allora $p_i = b_{E_i}$. Per ogni $i \in I$ tale che $\{i\}$ non è né un blocco di $\mathcal{C}$ né di $\mathcal{D}$, $b_{E_i} \wedge b_{F_i}$ è una tripartizione: supposto che, senza ledere la generalità, $i \in E_i^{-1} \cap F_i^{-1}$, ossia $E_i^{-1} = \{i\} \cup F_i$ e $F_i^{-1} = \{i\} \cup E_i$, si ha:

$$b_{E_i} \wedge b_{F_i} = \{\{i\}, E_i, F_i\}.$$

Proposizione 5.3.3 *La m-upla di partizioni $(b_{E_1} \wedge b_{F_1}, \ldots, b_{E_m} \wedge b_{F_m})$ è quasi-distributiva.*

Dim. E' chiaro che $b_{E_i} \wedge b_{F_i} \leq p_i$ per ogni $i \in I$; allora per provare l'asserto è sufficiente mostrare che per ogni $i \neq j \in I$ vale la condizione (#).

Se $b_{E_i} \wedge b_{F_i} = p_i$, l'asserto è ovvio. Siano $\mathcal{C}_i = b_{E_i} \wedge b_{F_i} = \{\{i\}, E_i, F_i\}$ e $\mathcal{C}_j = b_{E_j} \wedge b_{F_j} = \{\{j\}, E_j, F_j\}$. Si hanno quattro possibilità: $j \in F_i$ e $i \in E_j$; $j \in F_i$ e $i \in F_j$; $j \in E_i$ e $i \in E_j$; $j \in E_i$ e $i \in F_j$. Nel primo caso, la condizione (#) vale se E_i, il blocco di $\mathcal{C}_i$ non contenente $\{j\}$, è incluso in E_j, il blocco di $\mathcal{C}_j$ contenente $\{i\}$. Poiché $b_{E_i}, b_{E_j} \in V(\mathcal{C})$; $b_{F_i}, b_{F_j} \in V(\mathcal{D})$; e $E_i^{-1} = \{i\} \cup F_i$, $F_i^{-1} = \{i\} \cup E_i$, $E_j^{-1} = \{j\} \cup F_j$ e $F_j^{-1} = \{j\} \cup E_j$, è facile provare che

$$\mathcal{C} \leq b_{E_i} \wedge b_{E_j} = \{E_i \cap E_j, \{i\} \cup (F_i \cap E_j), E_i \cap F_j, \{j\} \cup (F_i \cap F_j)\} \leq b_{E_i \cap F_j}$$

$$\mathcal{D} \leq b_{F_i} \wedge b_{F_j} = \{F_i \cap F_j, \{j\} \cup (F_i \cap E_j), E_i \cap F_j, \{i\} \cup (E_i \cap E_j)\} \leq b_{E_i \cap F_j}.$$

da cui segue che $b_{E_i \cap F_j} \in V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{D})$. Ma allora, essendo $V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{D}) = \{0\}$, si ha $E_i \cap F_j = \emptyset$ e di conseguenza $E_i \subseteq E_j$ come richiesto. I restanti casi sono analoghi. $\square$

Definizione 5.3.4 *Sia $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ una coppia di partizioni di I tali che $\mathbb{B}(m) = V(\mathcal{C}) \oplus V(\mathcal{D})$. La tenda*

$$\{A \subseteq I \mid p_A \leq b_{E_i} \wedge b_{F_i} \text{ per ogni } i \in A\}$$

sarà chiamata dominio di $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ e verrà denotata con $dom(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Avendo appena osservato che la m-upla $(b_{E_1} \wedge b_{F_1}, \ldots, b_{E_m} \wedge b_{F_m})$ è quasi-distributiva, dalla proposizione 5.1.3 segue che

Proposizione 5.3.5 *Se $\boldsymbol{T} = dom(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ allora $part_{\boldsymbol{T}}(t_i) = b_{E_i} \wedge b_{F_i}$ per ogni $i \in I$.*

Proposizione 5.3.6 *Sia $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ una coppia di partizioni di I tali che $\mathbb{B}(m) = V(\mathcal{C}) \oplus V(\mathcal{D})$. Se G è un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo rappresentato da un $\mathcal{T}$-morfismo t allora le seguenti sono equivalenti*:

(i) $G = G(\mathcal{C}) \oplus G(\mathcal{D})$;

(ii) $part_t(t_i) \leq b_{E_i} \wedge b_{F_i}$ *per ogni* $i \in I$;

(iii) $P(t)$ *è una sotto-tenda di* $dom(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Dim. Si osservi che $g_i = -g_{E_i} - g_{F_i}$, dove $g_{E_i} \in G(\mathcal{C})$ and $g_{F_i} \in G(\mathcal{D})$ per ogni $i \in I$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sia $i \in I$. Da $G = G(\mathcal{C}) \oplus G(\mathcal{D})$ segue che $t_i = t_G(g_i) = t_G(g_{E_i}) \wedge t_G(g_{F_i}) = t(b_{E_i}) \wedge t(b_{F_i}) = t(b_{E_i} \wedge b_{F_i})$, e quindi che $part_t(t_i) \leq b_{E_i} \wedge b_{F_i}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Per provare che $G = G(\mathcal{C}) \oplus G(\mathcal{D})$, posto $H = G(\mathcal{C}) \oplus G(\mathcal{D})$, è sufficiente osservare che $t_G(g_i) = t_H(g_i)$, ossia che $t_i = t(b_{E_i} \wedge b_{F_i})$, per ogni

$i \in I$. Ora, $t_i \leq t(b_{E_i} \wedge b_{F_i})$ poichè $part_t(t_i) \leq b_{E_i} \wedge b_{F_i}$, e di conseguenza $t_i = t(b_{E_i} \wedge b_{F_i})$ (la disuguaglianza opposta è sempre valida).

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Segue immediatamente dal fatto che $dom(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ è la massima tenda per la quale vale la (ii). $\Box$

Il seguente teorema fornisce una caratterizzazione degli elementi del dominio di $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Teorema 5.3.7 *Sia* $V(\mathcal{C}) \oplus V(\mathcal{D}) = \mathbb{B}(m)$ *e* $A \in \wp_R(m) \backslash \{\emptyset\}$. *Le seguenti condizioni sono equivalenti*:

(i) $A \in dom(\mathcal{C}, \mathcal{D})$;

(ii) $V(p_A) = (V(p_A) \cap V(\mathcal{C})) \oplus (V(p_A) \cap V(\mathcal{D})) = (V(p_A \vee \mathcal{C})) \oplus (V(p_A \vee \mathcal{D}))$;

(iii) $|A| = |\{C \in \mathcal{C} \mid C \subseteq A\}| + |\{D \in \mathcal{D} \mid D \subseteq A\}|$.

Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii) Se $A \in dom(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ allora $p_A \leq b_{E_i} \wedge b_{F_i}$ per ogni $i \in A$. Pertanto, si ha che $V(p_A) \geq V(b_{E_i} \wedge b_{F_i}) = \langle b_{E_i}, b_{F_i} \rangle$, e di conseguenza $V(p_A) = \langle p_i \mid i \in A \rangle = \langle b_{E_i} + b_{Fi} \mid i \in A \rangle = (V(p_A) \cap V(\mathcal{C})) \oplus (V(p_A) \cap V(\mathcal{D})) = (V(p_A \vee \mathcal{C})) \oplus (V(p_A \vee \mathcal{D}))$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sia $i \in A$. Da $V(p_A) = (V(p_A) \cap V(\mathcal{C})) \oplus (V(p_A) \cap V(\mathcal{D}))$ segue che $b_{E_i} \in (V(p_A) \cap V(\mathcal{C}))$ e $b_{F_i} \in (V(p_A) \cap V(\mathcal{D}))$. Pertanto $b_{E_i} \wedge b_{F_i} \geq p_A$ per ogni $i \in A$, e di conseguenza $A \in dom(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) E' immediato una volta osservato che, per ogni partizione $\mathcal{C}$ di I, $dimV(p_A \vee \mathcal{C}) = |p_A \vee \mathcal{C}| - 1 = |\{C \in \mathcal{C} \mid C \subseteq A\}|$. $\Box$

Corollario 5.3.8 *Sia* $V(\mathcal{C}) \oplus V(\mathcal{D}) = \mathbb{B}(m)$. Se $A \in dom(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ *allora* $p_A = (p_A \vee \mathcal{C}) \wedge (p_A \vee \mathcal{D})$.

Dim. Da $V(p_A) = (V(p_A \vee \mathcal{C})) \oplus (V(p_A \vee \mathcal{D})) \leq V((p_A \vee \mathcal{C}) \wedge V(p_A \vee \mathcal{D}))$ segue che $(p_A \vee \mathcal{C}) \wedge (p_A \vee \mathcal{D}) \leq p_A$ e quindi che $(p_A \vee \mathcal{C}) \wedge (p_A \vee \mathcal{D}) = p_A$. $\Box$

La condizione precedente non è sufficiente, per esempio, sia:

- $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$,
- $\mathcal{D} = \{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}\}$,
- $A = \{1, 2, 3\}$;

è facile controllare che $p_A = (p_A \vee \mathcal{C}) \wedge (p_A \vee \mathcal{D})$ ma $A \notin dom(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ poichè $p_A \not\leq b_{E_i} \wedge b_{F_i}$ per ogni $i \in A$.

5.4 Addendi indecomponibili

Come osservato, se G è un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo rappresentato da un $\mathcal{T}$-*morfismo* t allora ogni addendo diretto di G è un $G(\mathcal{C})$ per qualche $\mathcal{C} \in \mathbb{P}(m)$, e se $G(\mathcal{D})$ è il suo complemento in G allora $V(\mathcal{C}) \oplus V(\mathcal{D}) = \mathbb{B}(m)$. In questo paragrafo, si proverà che se $G(\mathcal{C})$ è indecomponibile allora $\mathcal{D}$ è una partizione puntata e che tale condizione è anche sufficiente se G è rappresentato da $dom(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Sia $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ una partizione di I, e p_D una partizione puntata di I tale che $V(\mathcal{C}) \oplus V(p_D) = \mathbb{B}(m)$; allora $|C_j \cap D^{-1}| = 1$ per ogni $j \in \{1, \ldots, k\}$. Pertanto, posto $J = \{1, \ldots, k\}$ e $r = m - k$, si può assumere senza ledere la generalità $D = \{1, 2, \ldots, r\}$, $C_j \cap D^{-1} = \{r + j\}$ per ogni $j \in J$. Allora, per ogni $j \in J$, si ha

$$C_j = X_j \cup \{r + j\},$$

con $X_j = C_j \backslash \{r + j\} \subseteq D$. Osserviamo che X_j può essere vuoto.
Posto $\boldsymbol{T} = dom(\mathcal{C}, p_D)$, è facile controllare che

$$part_{\boldsymbol{T}}(t_i) = b_{E_i} \wedge b_{F_i} = p_i$$

per ogni $i \in D$, e

$$part_{\boldsymbol{T}}(t_{r+j}) = b_{E_{r+j}} \wedge b_{F_{r+j}} = b_{C_j} \wedge b_{X_j} = \{\{r + j\}, X_j, I \backslash C_j\}$$

per ogni $j \in J$. In particolare, se $X_j = \emptyset$ allora $part_{\boldsymbol{T}}(t_{r+j}) = p_{r+j}$.

Lemma 5.4.1 *Sia* $\boldsymbol{T} = dom(\mathcal{C}, p_D)$. *Si ha*:

(i) *tutti i sottoinsiemi di* D *appartengono a* $\boldsymbol{T}$;

(ii) *se* $A \in \boldsymbol{T}$ *e* $r + j \in A$ *per qualche* $j \in J$ *allora o* $C_j \subseteq A$ *o* $I \backslash C_j \subseteq A$.

Dim. (i) E' banale.

(ii) Se $A \in \boldsymbol{T}$ e $r+j \in A$ per qualche $j \in J$ allora A^{-1} è incluso in un blocco di $part_{\boldsymbol{T}}(t_{r+j}) = \{\{r+j\}, I \backslash C_j, X_j\}$, e di conseguenza o $C_j = \{r+j\} \cup X_j \subseteq A$ o $\{r + j\} \cup (I \backslash C_j) \subseteq A$. $\square$

Definizione 5.4.2 *Con le notazioni date per una coppia di partizioni* $(p_D, \mathcal{C})$, *s'introducono due famiglie di sottoinsiemi di* I *(cfr. esempio (c) nel Paragrafo 5.5)*:

$$P(t)_1 = \{(\bigcup_{j \in J'} C_j) \cup S \mid J' \subset J, S \subseteq (\bigcup_{j \in J \backslash J'} X_j) \ e \ |(\bigcup_{j \in J \backslash J'} X_j) \backslash S| \geq 2 - |J \backslash J'|\},$$

$$P(t)_2 = \{D^{-1} \cup (\bigcup_{j \neq j'} X_j) \cup S \mid j' \in J, S \subseteq X_{j'} \ e \ |X_{j'} \backslash S| \neq 1\}.$$

Lemma 5.4.3 $dom(p_D, \mathcal{C}) = P(t)_1 \cup P(t)_2$.

Dim. Non è difficile controllare che se $A \in P(t)_1 \cup P(t)_2$ allora A^{-1} è incluso in un blocco di $part_t(t_i)$ per ogni $i \in A$, e quindi $A \in dom(p_D, \mathcal{C})$.

Sia, ora, $A \in dom(p_D, \mathcal{C})$. Se $\{r+1, \ldots, m\} \not\subseteq A$ allora, denotato con J' l'insieme $\{j \in J \mid r+j \in A\}$, dal lemma 5.4.1(ii) segue che $C_j \subseteq A$ per ogni $j \in J'$. Allora, se $S = A \backslash (\bigcup_{j \in J'} C_j)$ si ha $A \in P(t)_1$. Altrimenti, se $D^{-1} = \{r+1, \ldots, m\} \subseteq A$ allora, per il lemma 5.4.1(ii), o $C_j \subseteq A$ per ogni $j \in J$ e quindi $A = I$, o esiste un $j \in J$ tale che X_j non è incluso in A e $I \backslash C_j \subseteq A$, e quindi $A \in P(t)_2$. $\square$

Sia G un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo rappresentato da un $\mathcal{T}$-*morfismo* t.

Proposizione 5.4.4 *Se $G = G(\mathcal{C}) \oplus G(\mathcal{D})$, con $G(\mathcal{C})$ indecomponibile, allora $\mathcal{D}$ è una partizione puntata.*

Dim. Se $\mathcal{D}$ non è una partizione puntata allora esistono due blocchi $D_i, D_j \in \mathcal{D}$ tali che $|D_i|, |D_j| \geq 2$, e un blocco C di $\mathcal{C}$ tale che $|D_i \cap C| = |D_j \cap C| = 1$. Allora, senza ledere la generalità, sia:

$$D_1 = \{1, 3, \ldots\},\ D_2 = \{2, 4, \ldots\},\ C_1 = \{1, 2, \ldots\} \text{ e } C_4 = \{4, \ldots\}.$$

Dalla proposizione 5.3.6 segue che $part_t(t_1) \leq b_{E_1} \wedge b_{F_1} = \{\{1\}, E_1, F_1\}$ dove $b_{E_1} \in V(\mathcal{C})$ e $b_{F1} \in V(\mathcal{D})$ e di conseguenza

$$\mathcal{C} \leq \{E_1, F_1 \cup \{1\}\} \text{ e } \mathcal{D} \leq \{F_1, E_1 \cup \{1\}\}.$$

Pertanto, $C_1 \backslash \{1\} = \{2, \ldots\} \subseteq F_1$, da cui segue $D_2 = \{2, 4, \ldots\} \subseteq F_1$ e quindi $C_4 = \{4, \ldots\} \subseteq F_1$. D'altra parte $D_1 \subseteq E_1$ e dunque $E_1 \neq \emptyset$. Pertanto, posto $E = \{i \in J \mid C_i \subseteq E_1\}$ e $F = \{i \in J \mid C_i \subseteq F_1\}$, si ha $J = \{1\} \cup E \cup F$ e $E, F \neq \emptyset$.

Sia t'' la tenda di base $(t_{C_1}, \ldots, t_{C_k})$. Dal corollario 2.4.1 segue che per ogni $A'' \in P(t'')$ esiste un $A \in P(t)$ tale che $A'' = \mathcal{C}[A]$. Se $A'' = \mathcal{C}[A]$ allora $1 \in A''$ se e solo se $1 \in A$. Infatti, $1 \in \mathcal{C}[A]$ se e solo se $p_A \leq b_{C_1}$ ossia se o $C_1 \subseteq A$ e di conseguenza $1 \in A$, o $C_1^{-1} = C_2 \cup \cdots \cup C_k \subseteq A$ e di conseguenza $\mathcal{C}[A] = \{1, \ldots, k\}$. Ora, se $1 \in A$ allora $p_A \leq \{\{1\}, E_1, F_1\}$; pertanto, o $E_1 \subseteq A$ e quindi $E \subseteq \mathcal{C}[A]$, o $F_1 \subseteq A$ e quindi $F \subseteq \mathcal{C}[A]$. Allora, ogni elemento di $P(t'')$ che contiene 1 contiene o E o F, pertanto $part_{t''}(t_{C_1}) \leq \{\{1\}, E, F\}$. Dalla proposizione 4.4.1 segue allora che $G(\mathcal{C})$ è decomponibile. $\square$

Proposizione 5.4.5 *Se $P(t) = dom(p_D, \mathcal{C})$ allora $G(\mathcal{C})$ è indecomponibile. Inoltre, con la notazione data per gli X_j, una decomposizione di G_D in indecomponibili è $G_{X_1} \oplus \cdots \oplus G_{X_k}$ e pertanto una decomposizione di G in indecomponibili è*

$$G = G(\mathcal{C}) \oplus G_{X_1} \oplus \cdots \oplus G_{X_k}$$

Dim. Dalla proposizione 5.3.6, segue che $G = G_D \oplus G(\mathcal{C})$.
$G(\mathcal{C})$ è rappresentato dal $\mathcal{T}$-*morfismo* t'' di base $(t_{C_1}, \ldots, t_{C_k})$. Dal corollario 2.4.15 segue che $P(t'') = \{\mathcal{C}[A] \neq \varnothing \mid A \in P(t)\}$. Allora dal fatto che, per il lemma 5.4.1, $C_1, \ldots, C_k \in P(t)$, segue che $\mathcal{C}[C_1] = \{1\}, \ldots, \mathcal{C}[C_k] = \{k\}$ appartengono a $P(t'')$. Pertanto $part_{t''}(t_{Cj}) \geq p_j$ e di conseguenza $part_{t''}(t_{C_j}) = p_j$ per ogni $j \in J$. Dunque, per la proposizione 4.4.2, $G(\mathcal{C})$ è indecomponibile.

G_D è rappresentato dal $\mathcal{T}$-*morfismo* t' di base $(t_D, t_i \mid i \in D)$. Dal corollario 2.4.15 segue che $P(t') = \{p_D[A] \neq \varnothing \mid A \in P(t)\}$. Ora $p_D[A]$ è un sottoinsieme di $\{1, \ldots, r, \{D^{-1}\}\}$. Si osservi che un $i \in \{1, \ldots, r\}$ appartiene a $p_D[A]$ se e solo se $i \in A$, e che $\{D^{-1}\} \in p_D[A]$ se e solo se $p_A \leq b_D$, ossia se o $D^{-1} \subseteq A$ o $D \subseteq A$. Allora, tutti i sottoinsiemi propri di D, essendo primi di t, sono anche primi di t'. Inoltre, il lemma 5.4.3 assicura che $P(t) = P(t)_1 \cup P(t)_2$, quindi un primo A di t che non contiene $X_1 \cup \cdots \cup X_k = D$, contiene D^{-1} se e solo se $A \in P(t)_2$. Pertanto, l'insieme dei primi di t' contenenti $\{D^{-1}\}$ è $\{p_D[A] \mid A \in P(t)_2\} \cup \{D \cup \{D^{-1}\}\}$. Ora, se $A \in P(t)_2$ allora $A = D^{-1} \cup (\bigcup_{j \neq j'} X_j) \cup S$ per qualche $j' \in J$ e $S \subset X_{j'}$ tale che $|X_{j'} \backslash S| \neq 1$, dunque è facile controllare che $p_D[A] = \{D^{-1}\} \cup (\bigcup_{j \neq j'} X_j) \cup S$.
Riassumendo, allora tutti i sottoinsiemi propri di D sono primi di t', e

$$\{\{D^{-1}\} \cup (\bigcup_{j \neq j'} X_j) \cup S \mid j' \in J, S \subset X_{j'} \ e\ |X_{j'} \backslash S| \neq 1\} \cup \{D \cup \{D^{-1}\}\}$$

è l'insieme dei primi di t' che contengono $\{D^{-1}\}$. Pertanto, si ha:

- $part_{t'}(t_i) = p_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, r\}$,
- $part_{t'}(t_D) = \{\{D^{-1}\}, X_1, \ldots, X_k\}$.

Allora (cfr. 4.4.4) una decomposizione di G_D in indecomponibili è

$$(G_D)_{X_1} \oplus \cdots \oplus (G_D)_{X_k}.$$

Per provare la seconda parte dell'asserto è sufficiente osservare che $(G_D)_{X_j} = G_{X_j}$ per ogni $j \in J$. $\square$

Se $P(t)$ è una sottotenda di $dom(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ allora $G(\mathcal{C})$ non è in generale indecomponibile: è sufficiente pensare alla tenda $\{I\}$.

Se G è rappresentato dalla tenda $dom(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, si ottiene come corollario della proposizione 5.4.4 e della proposizione 5.4.5:

Teorema 5.4.6 *Se G è un* $\mathrm{B}^{(1)}$*-gruppo rappresentato da un $\mathcal{T}$-morfismo t tale che $P(t) = dom(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ allora $G(\mathcal{C})$ è indecomponibile se e solo se $\mathcal{D}$ è una partizione puntata.*

La proposizione 5.4.4 fornisce una condizione necessaria affinchè un $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppo G sia uguale a $G_1 \oplus G_2$ con G_2 indecomponibile. Si darà, ora, una descrizione più dettagliata della condizione utile per decidere quando la somma diretta di due $B^{(1)}$-gruppi è un $B^{(1)}$-gruppo, un problema risolto soltanto per la somma diretta di due indecomponibili [18].

Sia G un $B^{(1)}$-gruppo rappresentato da un $\mathcal{T}$-*morfismo* t.

Se $G = G(p_D) \oplus G(\mathcal{C})$ allora denotati con $t^{'}$ e $t^{''}$ i $\mathcal{T}$-*morfismi* rispettivamente di basi $(t_D, t_i \mid i \in D)$ e $(t_{C_1}, \dots, t_{C_k})$, e posto $\rho^{'} = \tau_D = min(T(G(p_D)))$ e $\rho^{''} = t(\mathcal{C}) = min(T(G(\mathcal{C})))$, si ha:

Proposizione 5.4.7 *Valgono le seguenti affermazioni*:

(i) $t_D \leq \rho^{'} \vee \rho^{''}$;

(ii) $t_D = t^{'}(\{\{D^{-1}\}, X_1, \dots, X_k\})$;

(iii) $t_{C_j} \leq \tau_{X_j} \vee \rho^{''}$ *per ogni* $j \in J$;

(iv) $t_{C_j} \leq \tau_{X_j} \vee \tau_{D \setminus X_j}$ *per ogni* $j \in J$.

Dim. Si tenga presente che $\{\tau_A \mid A \in P(t)\}$ è un insieme di $\vee$-generatori di $Im(t) = T(G)$.

(i) $t_D = \tau_D \vee \tau_{I \setminus D}$ e $\rho^{'} = \tau_D$. Se $A \in P(t)$ e $\tau_A \leq \tau_{I \setminus D}$ allora $I \setminus D \subseteq A$, ossia $\{r+1, r+2, \dots, m\} \subseteq A$. Pertanto, per il lemma 5.4.1, o $C_j \subseteq A$ per ogni $j \in J$, e di conseguenza $A = I$ e τ_A è il minimo di $T(G)$; o esiste un unico $j \in J$ tale che $I \setminus C_j \subseteq A$. Allora $\tau_A \leq \tau_{I \setminus C_j} \leq t(\mathcal{C}) = \rho^{''}$. Ne deriva che $\tau_{I \setminus D} \leq \rho^{''}$ e dunque che $t_D \leq \rho^{'} \vee \rho^{''}$.

(ii) E' immediato che $t^{'}(\{\{D^{-1}\}, X_1, \dots, X_k\}) = t(\{D^{-1}, X_1, \dots, X_k\})$. Ora, $t(\{D^{-1}, X_1, \dots, X_k\}) \leq t_D = \tau_D \vee \tau_{I \setminus D}$. Per ottenere la disuguaglianza opposta si osservi che $\tau_D \leq t(\{D^{-1}, X_1, \dots, X_k\})$. Inoltre, se $A \in P(t)$ e $\tau_A \leq \tau_{I \setminus D}$ allora analogamente a quanto osservato in precedenza o $\tau_A = min(T(G))$ o esiste un unico $h \in J$ tale che $I \setminus C_h \subseteq A$; ma $r + h \in A$ e di conseguenza $I \setminus X_h \subseteq A$. Pertanto o $\tau_A = min(T(G))$ o $\tau_A \leq \tau_{I \setminus X_h} \leq t(\{D^{-1}, X_1, \dots, X_k\})$ e di conseguenza $\tau_{I \setminus D} \leq t(\{D^{-1}, X_1, \dots, X_k\})$.

(iii) La verifica è analoga alla (i).

(iv) Si osservi che $t_{C_j} = \tau_{C_j} \vee \tau_{I \setminus C_j}$ dove $\tau_{C_j} \leq \tau_{X_j}$ e $\tau_{I \setminus C_j} \leq \tau_{D \setminus X_j}$. $\square$

Si conclude con un interessante caso particolare:

Proposizione 5.4.8 *Sia* $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ *una partizione di* I *tale che* $|C_i| \leq 2$ *per ogni* $i \in \{1, \dots, k\}$. *Se* $G(\mathcal{C})$ *è un addendo diretto di* G *allora il complemento di* $G(\mathcal{C})$ *in* G *è completamente decomponibile.*

Dim. Sia $G(\mathcal{D})$ il complemento di $G(\mathcal{C})$ in G, $G(\mathcal{D}_1), \dots, G(\mathcal{D}_s)$ gli addendi diretti indecomponibili di $G(\mathcal{D})$. Per ogni $i \in \{1, \dots, s\}$, dal corollario 5.2.3 segue che $G(\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}_i) = G(\mathcal{C}) \oplus G(\mathcal{D}_i)$; essendo $G(\mathcal{D}_i)$ indecomponibile, $\mathcal{C}$ deve essere una partizione puntata dell'insieme $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}_i$. Ora il blocco non-singleton di $\mathcal{C}$ contiene esattamente due elementi, pertanto $\mathcal{D}_i$ deve essere una bipartizione dell'insieme $C \wedge \mathcal{D}_i$, e dunque $G(\mathcal{D}_i)$ deve avere rango 1. Ne deriva che, ogni addendo diretto indecomponibile di $G(\mathcal{D})$ ha rango 1, e di conseguenza $G(\mathcal{D})$ è completamente decomponibile. $\square$

5.5 Esempi

Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono due partizioni di I tali che $\mathbb{B}(m) = V(\mathcal{C}) \oplus V(\mathcal{D})$, come costruire tutti i $\mathrm{B}^{(1)}$-gruppi G tali che $G = G(\mathcal{C}) \oplus G(\mathcal{D})$? Essendo le tende che rappresentano tali gruppi sotto-tende di $\boldsymbol{T} = dom(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, è sufficiente costruire $\boldsymbol{T}$. Ciò può essere fatto in due passi:

(a) calcolo della base di partizioni di $\boldsymbol{T}$;

(b) applicazione del teorema 5.1.3 per calcolare gli elementi di $\boldsymbol{T}$ a partire da una base di partizioni.

Il procedimento è generale, gli esempi che faremo saranno relativi al caso in cui $\mathcal{D}$ è una partizione puntata.

Se $\{i\}$ è un blocco singleton di $\mathcal{C}$ o di $\mathcal{D}$ allora è evidente che $part_{\boldsymbol{T}}(t_i) = p_i$. Sia, senza ledere la generalità, $i = 1 \in C_1$ (un blocco non-singleton di $\mathcal{C}$) e $1 \in D_1$ (un blocco non-singleton di $\mathcal{D}$). Si vuole calcolare $part_{\boldsymbol{T}}(t_1) = \{\{1\}, E_1, F_1\}$ dove $p_1 = b_{E_1} + b_{F_1}$ con $b_{E_1} \in V(\mathcal{C})$, ossia $b_{E_1} \geq \mathcal{C}$, e $b_{F_1} \in V(\mathcal{D})$, ossia $b_{F_1} \geq \mathcal{D}$. Da ciò segue che

$$\mathcal{C} = \{\{1\} \cup F_1, E_1\} \text{ e } \mathcal{D} = \{\{1\} \cup E_1, F_1\},$$

dove $C_1 \subseteq \{1\} \cup F_1$, $D_1 \subseteq \{1\} \cup E_1$. Sia C_i un altro blocco di $\mathcal{C}$ che interseca D_1; C_i deve essere incluso in E_1. Pertanto, se $C_2, \ldots, C_s$ sono i blocchi di $\mathcal{C}$ che intersecano D_1 e $D_2, \ldots, D_r$ sono i blocchi di $\mathcal{D}$ che intersecano D_1, si ha che $C_2 \cup \cdots \cup C_s = E'_1 \subseteq E_1$, $D_2 \cup \cdots \cup D_r = F'_1 \subseteq F_1$ e di conseguenza

$$part_{\boldsymbol{T}}(t_1) \geq \{\{1\}, E'_1, F'_1, \{j\} \mid j \in J\} \text{ dove } J = I \backslash (\{1\} \cup E'_1 \cup F'_1). \quad (1)$$

Se $J = \emptyset$, abbiamo finito. Se no, esiste almeno un $j \in J$ tale che, denotato con C_j (risp. D_j) il blocco di $\mathcal{C}$ (risp. $\mathcal{D}$) che lo contiene, almeno uno fra $C_j \cap F'_1$ o $D_j \cap E'_1$ è non vuoto; altrimenti si avrebbe che $\mathcal{C} \vee \mathcal{D} \leq \{\{1\} \cup E'_1 \cup F'_1, J\}$. Inoltre, $C_j \cap F'_1$ e $D_j \cap E'_1$ non possono essere entrambi non vuoti, altrimenti si avrebbe che $C_j \subseteq F'_1$ e $D_j \subseteq E'_1$ e ciò comporterebbe che $j \in E'_1 \cap F'_1$, il che è assurdo.

Per fissare le idee sia $D_j \cap E'_1 \neq \emptyset$. In tal caso $j \in E_1$, e di conseguenza $C_j \subseteq E_1$, $D_j \cap F'_1 = \emptyset$; pertanto si ha:

$$part_t(t_1) \geq \{\{1\}, E'_1 \cup C_j, F'_1, \{j\} \mid j \in J'\}$$

e si ritorna al punto (1). Il caso $C_j \cap F'_1 \neq \emptyset$ è analogo; chiaramente il procedimento si arresta dopo un numero finito di passi.

Esempi:

(a) Sia $\mathcal{C} = \{\{1,2,5\}, \{3,4,6\}, \{7\}\}$, $\mathcal{D} = p_D = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5,6,7\}\}$. Si ha immediatamente:

- $part_t(t_1) = p_1$,
- $part_t(t_2) = p_2$,
- $part_t(t_3) = p_3$,
- $part_t(t_4) = p_4$,
- $part_t(t_7) = p_7$.

Per costruire $part_t(t_5)$, sia $C_1 = \{1,2,5\}$, $D_1 = \{5,6,7\}$; allora $C_2 = \{3,4,6\}$, $C_3 = \{7\}$, $D_2 = \{1\}$, $D_3 = \{2\}$, $E'_1 = \{3,4,6,7\}$, $F'_1 = \{1,2\}$. Non sono necessari ulteriori passi,

- $part_t(t_5) = \{\{5\},\{3,4,6,7\},\{1,2\}\}$.

Analogamente si ottiene:

- $part_t(t_6) = \{\{6\},\{3,4\},\{1,2,5,7\}\}$.

(b) Per costruire gli elementi di una tenda $\boldsymbol{T}$ che ha $(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2,\ldots,\mathcal{C}_m)$ come base di partizioni, ossia i sottoinsiemi regolari A di I tali che $p_A \leq \mathcal{C}_i$ per ogni $i \in A$, si procede come segue: se B è un sottoinsieme di un blocco non-singleton di $\mathcal{C}_i$ allora $A = B^{-1} \in \boldsymbol{T}$ se e solo se B è incluso in un blocco di $\mathcal{C}_j$ per ogni $j \in A$.

Ad esempio, rispetto alla base di partizioni costruita in (a), $A^{-1} = \{2,7\}$ non è incluso in un blocco di $part_{\boldsymbol{T}}(t_5)$, ma $5 \in A$; pertanto $A = \{1,3,4,5,6\}$ non appartiene a $\boldsymbol{T}$.

(c) Per dare un esempio di quanto asserito nel lemma 5.4.3, diamo il dominio della coppia $(\mathcal{C},\mathcal{D})$, dove $\mathcal{D} = p_D = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5,6,7\}\}$, $\mathcal{C} = \{\{1,2,5\},\{3,4,6\},\{7\}\}$.

Si ha: $I = \{1,2,\ldots,7\}$, $D = \{1,2,3,4\}$; $X_1 = \{1,2\}$, $X_2 = \{3,4\}$, $X_3 = \emptyset$, $J = \{1,2,3\}$; $m = 7$, $r = 4$, $k = 3$. Il dominio di $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ ha 56 elementi:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & * & 1 & * & 1 & * & * & 0 & 1 \\
1 & * & 1 & * & 1 & * & * & 0 & 1 \\
1 & * & * & 1 & * & 1 & * & 1 & 0 \\
1 & * & * & 1 & * & 1 & * & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & * & * & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

Dove $*$ sta per una qualsiasi scelta di 0 e 1, a condizione che ogni colonna abbia almeno due zeri. Le ultime due colonne rappresentano gli elementi di $P(t)_2$, le altre quelli di $P(t)_1$. La seconda colonna riassume tutti gli elementi di $\boldsymbol{T}$ inclusi in D.

Bibliografia

[1] D.M. Arnold, *Abelian groups and representations of finite partially ordered sets*, CMS books in Mathematics, Springer-Verlag New York, 2000.

[2] D.M. Arnold, C. Vinsonhaler, *Finite rank Butler groups: a survey of recent results*, Abelian Groups, (Curacao 1991), Dekker, New York, 1993, 17-41.

[3] E. Artin, *Geometric Algebra*, Interscience, New York.

[4] R. Baer, *Abelian groups without elements of finite order*, Duke Math. J. **3**, (1937), 68-122.

[5] F. Barioli, C. De Vivo, C. Metelli, *On vector spaces with distinguished subspaces and a redundant base*, Linear Algebra and its applications **374**, (2003),107-126.

[6] Birkoff, *Lattice Theory*, AMS Colloquium Publications, Providence, Rhode Island, 1979.

[7] M.R.C. Butler, *A class of torsion-free abelian groups of finite rank*, Proc. London Math. Soc.(3) **15**, (1965), 680-698.

[8] M.R.C. Butler, *Torsion-free modules and diagrams of vector spaces*, Proc. London Math. Soc.(3) **18**, (1968), 635-652.

[9] M.R.C. Butler, *Some almost split sequences in torsion-free abelian group theory*, Abelian Group Theory, Gordon and Beach, (New York 1987), 221-305.

[10] I. Caruso, C. De Vivo, C. Metelli, *Partition bases for $B^{(1)}$-groups*, in corso di stampa su Abelian Groups Rings and Modules, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Taylor and Francis.

[11] C. De Vivo, C. Metelli, *$B^{(1)}$-groups: some counterexamples*, Abelian groups e modules, (Colorado Springs, CO, 1995), Dekker, New York, (1996), 227-232.

[12] C. De Vivo, C. Metelli, *Finite partition lattices and Butler groups*, Comm. Algebra **27**, (1999), no. 4, 1571-1590.

[13] C. De Vivo, C. Metelli, *Admissible matrices as base changes of $B^{(1)}$-groups: a realizing algorithm*, Abelian groups and modules, (Dublin, 1998), Birkhäuser, Basel, (1999), 135-147.

[14] C. De Vivo, C. Metelli, *Decomposing $B^{(1)}$-groups: an algorithm,* Comm. Algebra **30**, (2002), no.12, 5621-5637.

[15] C. De Vivo, C. Metelli, *$\mathbb{Z}_2$-linear order-preserving tranformations of tents*, Ricerche di Matematica. LI (1), (2002), 159-184.

[16] C. De Vivo, C. Metelli, *A transvection decomposition in GL(n, 2)*, Colloquium Mathematicum **94** (1), (2002), 51-60.

[17] C. De Vivo, C. Metelli, *A constructive solution to the base change decomposition problem in $B^{(1)}$-groups*, Lectures Notes in Pure and Appl. Math., Marcel Dekker **236**, (2004), 119-132.

[18] C. De Vivo, C. Metelli, *On degenerate $B^{(2)}$-groups*, in corso di stampa su Houston Journal of Maths.

[19] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups*, vol. II, Academic Press, London, New York, 1973.

[20] L. Fuchs e C. Metelli, *On a class of Butler groups*, Manuscripta Math. **71**, (1991), 1-28.

[21] C. Metelli, *On direct sums of $B^{(1)}$-groups*, Comment. Math. Univ. Carolinae **34**,(1993), 587-591.

[22] H.P. Goethers, C. Megibben, *Quasi-isomorphism and $\mathbb{Z}_2$-representations for a class of Butler groups*, Rend. Sem. Math. Padova **106**, (2001), 21-45.

[23] H.P. Goethers, W. Ullery, *On quasi-decompositions of $B^{(1)}$-groups*, Comm. Algebra **23**, (1995), no.1, 131-137.

[24] H.P. Goethers, W. Ullery, C. Vinsonhaler, *Numerical invariants for a class of Butler groups*, Contemporary Mathematics **171**, (1994), 159-171.

[25] F. Richman, *An extension of the theory of completely decomposable torsion-free abelian groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **279**, (1983), 175-185.

[26] P. Yom, *A characterization of a class of Butler groups II*, Abelian Group Theory, Contemporary Math, **171**, (1994), 419-432.